



Dimensión Hausdorff de conjuntos de Julia de polinomios

L. M. Martínez González^{1,*}, G. Blé González ¹

¹División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco,
A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tabasco, México

*luis_ma89@hotmail.com

En este trabajo se presenta la implementación de un algoritmo que permite aproximar la dimensión Hausdorff de conjuntos de Julia geoméricamente finitos, de funciones polinomiales expansivas en el plano. En particular, se trabajan ejemplos en la familia de polinomios cuadráticos real.

In this paper is presented the implementation of an algorithm to approximate the Hausdorff dimension of Julia sets of geometrically finite, expansive polynomial functions in the plane. In particular, examples are worked in the family real quadratic polynomial.

Palabras clave: Dimensión, Conjuntos de Julia, Matriz de transición.

Keywords: Dimension, Julia sets, Transition matrix.

Introducción

Una de las herramientas que permiten comprender la geometría de los conjuntos fractales es la dimensión Hausdorff. Debido a la complejidad que presenta el cálculo de la dimensión para un subconjunto de \mathbb{R}^n , se han desarrollado algoritmos que permiten aproximar con suficiente precisión la dimensión para conjuntos con ciertas características. En particular, McMullen propone un algoritmo conocido como del valor propio y que funciona para conjuntos de Julia de polinomios expansivos, [McMIII]. En este trabajo presentamos una implementación de este algoritmo y la aplicamos a polinomios cuadráticos.

1. Dimensión Hausdorff

En esta sección daremos los conceptos básicos que permiten definir la dimensión Hausdorff de un conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$.

Si U es un subconjunto del espacio euclidiano \mathbb{R}^n , el diámetro de U está definido como:

$$|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\},$$

i.e., "la más grande distancia entre los pares de puntos de U ".

Una δ -cubierta de $F \subset \mathbb{R}^n$ es una colección numerable o finita $\{U_i\}$ de conjuntos de diámetro a lo más δ que cubren a F , i.e.,

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i,$$

con $0 < |U_i| \leq \delta$ para cada i .

Dado $F \subset \mathbb{R}^n$, s un número no negativo y $\delta > 0$, definimos

$$H_\delta^s = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ es una } \delta\text{-cubierta de } F \right\}.$$

Cuando δ decrece, la clase de cubiertas admisibles de F en la ecuación anterior se reduce, por consiguiente, el ínfimo de la definición H_δ^s se incrementa y así se aproxima a un límite cuando $\delta \rightarrow 0$. Así,

$$H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F)$$

está bien definido para todo subconjunto F de \mathbb{R}^n , sin embargo, el valor límite puede ser 0 o ∞ . Existe un valor crítico s en el cual $H^s(F)$ salta de ∞ a 0, este valor recibe el nombre de dimensión Hausdorff de F , $[F]$.

Definición 1.1. Sea $F \subset \mathbb{R}^n$, la dimensión de Hausdorff de F es el número $\dim_H(F) = \inf\{s \geq 0 : H^s(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : H^s(F) = \infty\}$.

2. Conjuntos de Julia

Para definir los conjuntos de Julia y de Fatou de un polinomio daremos las siguientes definiciones.

Definición 2.1. Sea $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una función analítica en x_0 y $f(x_0) = x_0$.

1. El punto x_0 es un punto fijo atractor si $|f'(x_0)| < 1$, si $f'(x_0) = 0$ diremos que x_0 es super-atractor.
2. El punto x_0 es un punto fijo repulsor si $|f'(x_0)| > 1$.
3. El punto x_0 es un punto fijo indiferente si $|f'(x_0)| = 1$, es decir, $f'(x_0) = e^{2\pi i\theta}$.

En términos de θ los puntos fijos indiferentes se pueden clasificar en parabólico (θ racional) y Siegel o Cremer (θ irracional), [CG].

Teorema 2.2. (Böttcher-1904) Sean f una aplicación analítica y z_0 un punto fijo super-atractor. Si $f(z) = z_0 + a_k(z - z_0)^k + \dots$, con $a_k \neq 0$, entonces existen U, V vecindades de z_0 y 0, respectivamente, y un bi-holomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ que conjuga $f(z)$ y $g(z) = z^k$. Esta conjugación es única módulo multiplicación por una raíz $(k-1)$ -ésima de la unidad.

Notemos que si f es un polinomio de grado $d \geq 2$, el infinito es un punto fijo super-atractor y por el teorema de Böttcher f es conjugado a z^d en una vecindad del infinito. Denotamos por $A_f(\infty)$ al dominio de atracción del infinito, es decir,

$$A_f(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = \infty\},$$

y el conjunto de *Julia* lleno de f

$$K_f = \{z \in \mathbb{C} : \text{la órbita } O_f(z) \text{ es acotada}\}.$$

49 El conjunto de *Julia* de f , J_f , es igual a la frontera de K_f que a su vez es igual a
50 la frontera de $A_f(\infty)$. El conjunto de *Fatou* de f , es el complemento de J_f , el cual es
51 igual a la unión de $A_f(\infty)$ y el interior de K_f .

52 De la definición de K_f , tenemos que es un conjunto compacto, perfecto, diferente
53 del vacío y lleno (su complemento en $\widehat{\mathbb{C}}$ es conexo). [CG]. Además se tienen los
54 siguientes resultados:

55 **Teorema 2.3. (Fatou-1919).** Sea f un polinomio, el conjunto K_f es conexo si y
56 sólo si la órbita de cada punto crítico pertenece a K_f .

57 **Teorema 2.4. (Fatou-1919).** Si f es un polinomio y tiene una órbita atractora ξ ,
58 entonces existe un punto crítico en el dominio inmediato de atracción de ξ .

59 3. Algoritmo

60 Con la finalidad de describir el algoritmo presentado por McMullen en [McMIII]
61 daremos las siguientes definiciones.

Definición 3.1. Un sistema dinámico conforme \mathcal{F} sobre $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, es una familia de funciones conformes

$$f : U(f) \rightarrow S^n,$$

62 donde $U(f)$ es un abierto de S^n .

Definición 3.2. Dado un sistema dinámico conforme \mathcal{F} , una medida finita y positiva μ definida en S^n es una densidad \mathcal{F} -invariante con dimensión δ , si

$$\mu(f(E)) = \int_E |f'(x)|^\delta d\mu$$

63 siempre que $f|_E$ es inyectiva, $E \subset U(f)$ es un conjunto de Borel y $f \in \mathcal{F}$.

64 **Definición 3.3.** Una partición de Markov para un sistema dinámico conforme \mathcal{F}
65 con densidad \mathcal{F} -invariante μ , es una colección no vacía $P = \langle (P_i, f_i) \rangle$ de bloques
66 compactos y arcoconexos $P_i \subset S^n$, y aplicaciones $f_i \in \mathcal{F}$ definida en P_i , tal que:

1. $f_i(P_i) \supset \bigcup_{i \rightarrow j} P_j$, donde la relación $i \mapsto j$ significa que $\mu(f_i(P_i) \cap P_j) > 0$;
2. f_i es un homeomorfismo en una vecindad de $P_i \cap f_i^{-1}(P_j)$, cuando $i \mapsto j$;
3. $\mu(P_i) > 0$;
4. $\mu(P_i \cap P_j) = 0$ si $i \neq j$; y
5. $\mu(f_i(P_i)) = \mu(\bigcup_{i \rightarrow j} P_j) = \sum_{i \rightarrow j} \mu(P_j)$.

El refinamiento de una partición P

$$\mathbf{R}(P) = \langle (\mathbf{R}_{ij}, f_i) : i \mapsto j \rangle$$

es una nueva partición de Markov definida por

$$\mathbf{R}_{ij} = f_i^{-1}(P_j) \cap P_i.$$

En otras palabras cada bloque de la partición P es subdividido y las aplicaciones son las mismas en cada bloque subdividido.

A continuación presentamos el algoritmo que permite aproximar la dimensión δ de una densidad μ . Supongamos que se tiene una partición de Markov $P = \langle (P_i, f_i) \rangle$, y una muestra de puntos $x_i \in P_i$. El algoritmo calcula una sucesión de aproximaciones $\alpha(\mathbf{R}^n(P))$ a δ procediendo de la siguiente manera:

1. Para cada $i \mapsto j$, se calcula $y_{ij} \in P_i$ tal que $f_i(y_{ij}) = x_j$.
2. Calcule la matriz de transición

$$T_{ij} = \begin{cases} |f'_i(y_{ij})|^{-1} & \text{si } i \mapsto j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

3. Encuentre $\alpha(P) \geq 0$ tal que el radio espectral satisface

$$\lambda(T^\alpha) = 1.$$

Donde $(T^\alpha)_{ij} = T_{ij}^\alpha$.

4. La salida $\alpha(P)$ es una aproximación a δ .
5. Reemplace P por un refinamiento $\mathbf{R}(P)$, defina nuevamente una muestra de puntos $x_{ij} = y_{ij} \in \mathbf{R}_{ij}$, y regrese al paso 1.

El resultado que nos garantiza la convergencia de este algoritmo es el siguiente teorema de McMullen, [McMIII].

Teorema 3.4. (McMullen-1997) Sea P una partición de Markov expansiva para un sistema dinámico conforme \mathcal{F} con una densidad invariante μ de dimensión δ . Entonces

$$\alpha(\mathbf{R}^n(P)) \rightarrow \delta$$

cuando n tiende a ∞ .

86 Este resultado nos garantiza que basta con construir una partición de Markov
 87 expansiva en el conjunto de Julia de un polinomio y tener una medida invariante μ
 88 de dimensión δ , para poder aplicar el algoritmo y encontrar una aproximación a la
 89 dimensión Hausdorff de éste.

90 **Definición 3.5.** Un polinomio es expansivo si su conjunto de Julia no contiene puntos
 91 críticos o puntos parabólicos.

92 **Definición 3.6.** Un polinomio f es geoméricamente finito si todo punto crítico que
 93 pertenece a $J(f)$ es pre-periódico.

94 Note que todo polinomio expansivo es geoméricamente finito.

95

96 El siguiente resultado nos garantiza la existencia de una medida invariante para
 97 los polinomios expansivos.

98 **Teorema 3.7. (McMullen-1997)** El conjunto de Julia de un polinomio f expan-
 99 sivo admite una única densidad invariante μ de dimensión $\delta = \dim_H(J_f)$, de medida
 100 total uno y soporte en el conjunto de J_f .

101 En la siguiente sección mostraremos la construcción de la partición de Markov para
 102 polinomios expansivos.

103 4. Particiones de Markov para polinomios

104 En esta parte construiremos, vía ángulos externos, una partición de Markov en el
 105 conjunto de Julia de polinomios expansivos.

106 Sea f un polinomio de grado $d \geq 2$, por el teorema de Böttcher existe Φ_f definida
 107 en una vecindad del infinito U_f tal que

$$\Phi_f(z^d) = f(\Phi_f(z)). \quad (1)$$

Si $K(f)$ es conexo, entonces $U_f = A_f(\infty) = \mathbb{C} - K_f$, [DH]. Es decir,

$$\Phi_f : (\widehat{\mathbb{C}} - \overline{\Delta}) \rightarrow (\widehat{\mathbb{C}} - K(f)).$$

Si f es geoméricamente finita, $J(f)$ es localmente conexo y por el teorema de Carathéodory, Φ_f se extiende continuamente a la frontera y se obtiene una aplicación

$$\phi_f : S^1 \rightarrow J(f)$$

108 que semiconjuga la dinámica de f en J_f a la multiplicación por d . Al punto $\phi_f(e^{2\pi i\theta}) \in$
 109 J_f se dice que tiene ángulo externo θ , [CG].

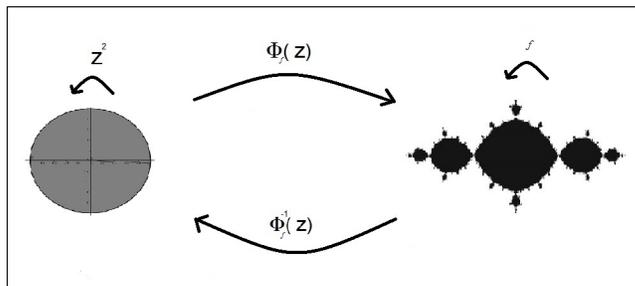


Figura 1. Conjugación

Teorema 4.1. (McMullen-1997) Si $f(z)$ es un polinomio expansivo con conjunto de Julia conexo, entonces $P = (\phi_f(I_i), f)$ es una partición de Markov expansiva para (f, μ) donde

$$I_i = \left[\frac{i-1}{d}, \frac{i}{d} \right]$$

110 bajo la identificación de $S^1 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ y μ es la densidad para f .

111 **4.1 Polinomios cuadráticos reales**

112 Sea $f_c(z) = z^2 + c$ con $c \in \mathbb{R}$. Este polinomio tiene un único punto crítico que es
 113 $z = 0$ y dependiendo de su órbita tenemos la conexidad de J_c . Para no introducir
 114 más notación, denotaremos por $J_c = J_{f_c}$ y $\phi_c = \phi_{f_c}$. Del Teorema 2.4 tenemos que
 115 si f_c tiene una órbita atractora, entonces la órbita de cero bajo f converge al ciclo
 116 atractor y por lo tanto f_c es expansivo. Por otro lado, si la órbita de cero tiende a
 117 infinito f_c es expansivo, pero J_c es disconexo, por el Teorema 2.3.

En ambos casos, el Teorema 4.1 garantiza la existencia de una partición de Markov
 expansiva $P = \langle (P_i, f_c) \rangle$ con $P_1 = \phi_c([0, \frac{1}{2}])$ y $P_2 = \phi_c([\frac{1}{2}, 1])$, donde

$$\phi_c : S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow J_c.$$

118 Por lo tanto, en este caso la dimensión de los conjuntos de Julias puede ser calculada
 119 con el algoritmo del valor propio.

120 Para la muestra de puntos, tomamos $\{x_1, x_2\} = \{\phi_c(\frac{1}{4}), \phi_c(\frac{3}{4})\} = f_c^{-1}(-\beta_c)$ donde
 121 $\beta_c = \phi_c(0)$ es el punto fijo de f_c con ángulo externo cero y $-\beta_c \in f^{-1}(\beta_c)$. Así,
 122 $f^2(x_i) = \beta_c$ y los puntos de la muestra para todos los refinamientos de P se encuentran
 123 en la órbita inversa de β_c .

124 Para construir la matriz de transición de esta partición nos apoyaremos de la se-
 125 miconjugación ϕ_c , la cual conjuga la dinámica de f_c a la multiplicación por dos en \mathbb{R}/\mathbb{Z} .
 126

127 En la figura 2 mostramos la partición inicial y la matriz $(PT)_1$ que llamaremos ma-
 128 triz de transición preliminar. Para construir la matriz transición $(MT)_1$ simplemente
 129 evaluamos el modulo de f'_c en cada uno de los puntos y_{ij} , y le sacamos el inverso, véase
 130 $(MT)_1$. Resolviendo la ecuación $\lambda((MT)_1^a) = 1$, obtenemos la primera aproximación
 131 a la dimensión Hausdorff de J_c . Para obtener una mejor aproximación, realizamos un

132 refinamiento a la partición y tomamos $x_{ij} = y_{ij}$. La matriz de transición preliminar
 133 en el segundo paso es $(PT)_2$ y se muestra en la figura 3. En general la matriz de
 134 transición preliminar $(PT)_n = [y_{ij}]$ y se construye como sigue:

135 Los y_{ij} están colocados de tal manera que el índice i indica que esta en la partición
 136 I_i y el índice j indica que es preimagen de x_j , esto para toda $i, j = 1, \dots, n$, véase
 137 $(PT)_n$.

138

139 La matriz de transición $(MT)_n$ se obtiene simplemente evaluando el modulo de f'_c en
 140 cada uno de los puntos y_{ij} , y le sacamos el inverso, véase MT_n .

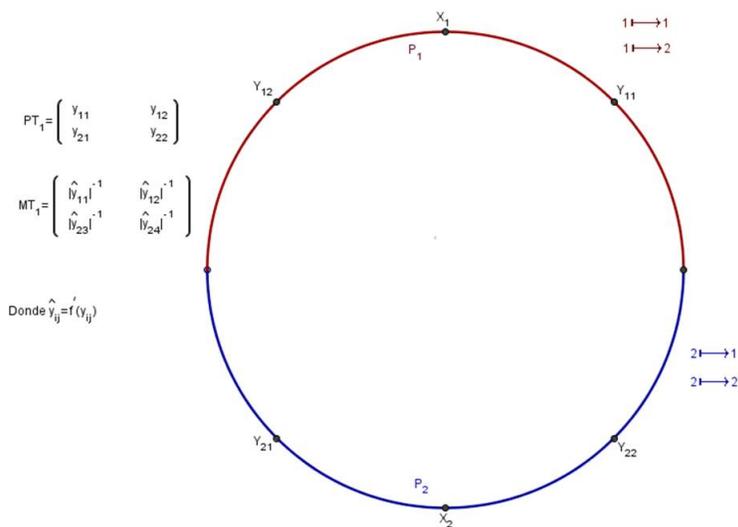


Figura 2. Partición inicial

$$(PT)_n = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{23} & y_{24} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & y_{(\frac{n}{2})(n-1)} & y_{(\frac{n}{2})(n)} \\ y_{(\frac{n}{2}+1)1} & y_{(\frac{n}{2}+1)2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{(\frac{n}{2}+2)3} & y_{(\frac{n}{2}+2)4} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & y_{(n)(n-1)} & y_{nn} \end{pmatrix}$$

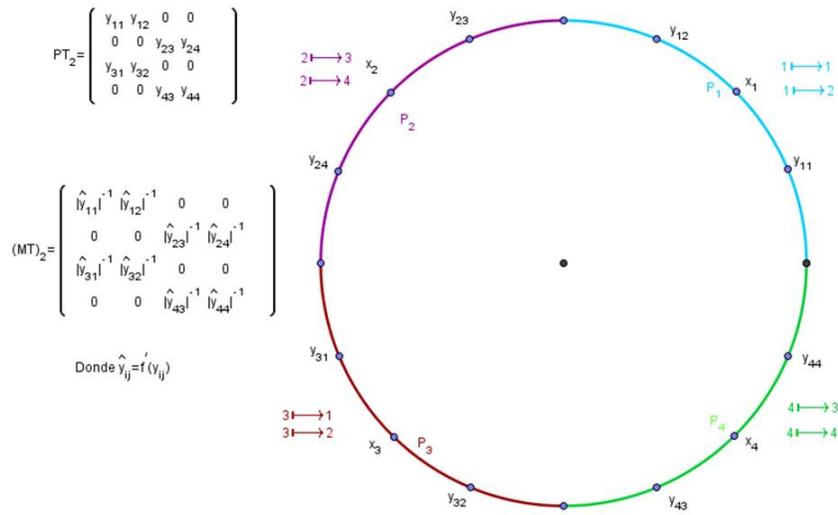


Figura 3. Primer refinamiento

$$(MT)_n = \begin{pmatrix} |\hat{y}_{11}|^{-\delta} & |\hat{y}_{12}|^{-\delta} & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\hat{y}_{23}|^{-\delta} & |\hat{y}_{24}|^{-\delta} & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & |\hat{y}_{(\frac{n}{2})(n-1)}|^{-\delta} & |\hat{y}_{(\frac{n}{2})(n)}|^{-\delta} \\ |\hat{y}_{(\frac{n}{2}+1)1}|^{-\delta} & |\hat{y}_{(\frac{n}{2}+1)2}|^{-\delta} & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\hat{y}_{(\frac{n}{2}+2)3}|^{-\delta} & |\hat{y}_{(\frac{n}{2}+2)4}|^{-\delta} & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & |\hat{y}_{(n)(n-1)}|^{-\delta} & |\hat{y}_{nn}|^{-\delta} \end{pmatrix}$$

141 Donde $\hat{y}_{ij} = f'(y_{ij})$.

142

143 Es importante mencionar que en la construcción de la matriz $(MT)_n$ se ha usado
144 fuertemente la simetría que tienen los conjuntos J_c para $c \in \mathbb{R}$.

145 Notemos que para obtener una aproximación a la dimensión Hausdorff de J_c , ne-
146 cesitamos calcular la potencia a la cual debemos elevar cada entrada de la matriz de
147 tal manera que el radio espectral de la matriz obtenida sea 1.

148 Dado que la matriz crece desmesuradamente resulta imposible hacer los cálculos
149 numéricos usando la función $\max(\text{abs}(\text{eig}(MT)))$ de Matlab en una computadora
150 convencional para obtener, el radio espectral en el refinamiento número 13. Este

151 problema nos llevó a hacer los cálculos del radio espectral usando el método de la
 152 potencia normalizado.

153 Se utilizó el método de la potencia normalizado para poder hacer el cálculo del radio
 154 espectral junto con una variante del método de bisección para encontrar esa potencia,
 155 además, dado que los cálculos de un parámetro c no depende de otro usamos parfor
 156 (una función de Matlab que permite trabajar en paralelo) para trabajar en paralelo
 157 y poder hacer cálculos de dimensión de más de un conjunto de Julia.

158 Para usar el método de la potencia se hizo un reacomodo de la matriz de transición
 159 quedando una matriz de $2^n \times 2$, que denotaremos por MT'_n :

$$MT'_n = \begin{pmatrix} |\widehat{y}_{11}|^{-1} & |\widehat{y}_{12}|^{-1} \\ |\widehat{y}_{23}|^{-1} & |\widehat{y}_{24}|^{-1} \\ |\widehat{y}_{35}|^{-1} & |\widehat{y}_{36}|^{-1} \\ |\widehat{y}_{47}|^{-1} & |\widehat{y}_{48}|^{-1} \\ \vdots & \vdots \\ |\widehat{y}_{(\frac{n}{2})(n-1)}|^{-1} & |\widehat{y}_{(\frac{n}{2})(n)}|^{-1} \\ |\widehat{y}_{(\frac{n}{2}+1)1}|^{-1} & |\widehat{y}_{(\frac{n}{2}+1)2}|^{-1} \\ |\widehat{y}_{(\frac{n}{2}+2)3}|^{-1} & |\widehat{y}_{(\frac{n}{2}+2)4}|^{-1} \\ |\widehat{y}_{(\frac{n}{2}+3)5}|^{-1} & |\widehat{y}_{(\frac{n}{2}+3)6}|^{-1} \\ |\widehat{y}_{(\frac{n}{2}+4)7}|^{-1} & |\widehat{y}_{(\frac{n}{2}+4)7}|^{-1} \\ \vdots & \vdots \\ |\widehat{y}_{(n)(n-1)}|^{-\delta} & |\widehat{y}_{nn}|^{-\delta} \end{pmatrix}$$

160
 161

162 El método de las potencias es un método iterativo de aproximaciones sucesiva, por
 163 lo cual, además de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ deberá conocerse una tolerancia establecida y
 164 también un cierto número de iteraciones.

165 Este método requiere de la siguiente fórmula recurrente: dado x^0 , se calcula $x^{k+1} =$
 166 Ax^k , con $k \in \mathbb{N}$, donde x^0 y x^k son vectores normalizados para toda k . Se usa este
 167 método ya que al momento de realizar la operación $MT'_n x^k$, las entradas de la matriz
 168 que tienen ceros no contribuyen en la multiplicación.

169 En la siguiente tabla podemos ver como se va obteniendo la sucesión de vectores
 170 y la sucesión de c_j .

j	$y^{(j-1)}$	$x^{(j)}$	$\lambda^{(j)}$
1	$y^{(0)} = \frac{1}{c_0} x^{(0)}$	$x^{(1)} = Ay^{(0)}$	c_1
2	$y^{(1)} = \frac{1}{c_1} x^{(1)}$	$x^{(2)} = Ay^{(1)}$	c_2
3	$y^{(2)} = \frac{1}{c_2} x^{(2)}$	$x^{(3)} = Ay^{(2)}$	c_3
4	$y^{(3)} = \frac{1}{c_3} x^{(3)}$	$x^{(4)} = Ay^{(3)}$	c_4
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
k	$y^{(j-1)} = \frac{1}{c_{j-1}} x^{(j-1)}$	$x^{(j)} = Ay^{(j-1)}$	c_j

172 Se cumple que:

- 173 1. La sucesión de escalares c_j tiende al radio espectral.

174

2. La sucesión de vectores

$$\{x^j\}_{j=1}^{\infty} \rightarrow x,$$

175

donde x es un vector propio normalizado asociado al radio espectral.

176

El siguiente Teorema garantiza la convergencia de este método cuya demostración puede ser consultada en [YS].

177

178

Teorema 4.2. Supongamos que existe un único valor propio λ_1 dominante de una matriz A . Entonces la sucesión de vectores x^j generados por el método de la potencia converge a un vector propio asociado a λ_1 y c_j converge a λ_1 .

179

180

181

5. Resultados

182

La implementación en Matlab del método de la potencia y una variante del método de bisección en el algoritmo del valor propio fueron aplicados a la familia de polinomios cuadráticos reales y los resultados obtenidos en el refinamiento número 15 se muestran en la tabla de la figura 5. En la tabla de la figura 6 se muestra los datos del artículo [McMIII]. En la gráfica que se muestra en la figura 4 se hace la comparación de las dos tablas.

183

184

185

186

187

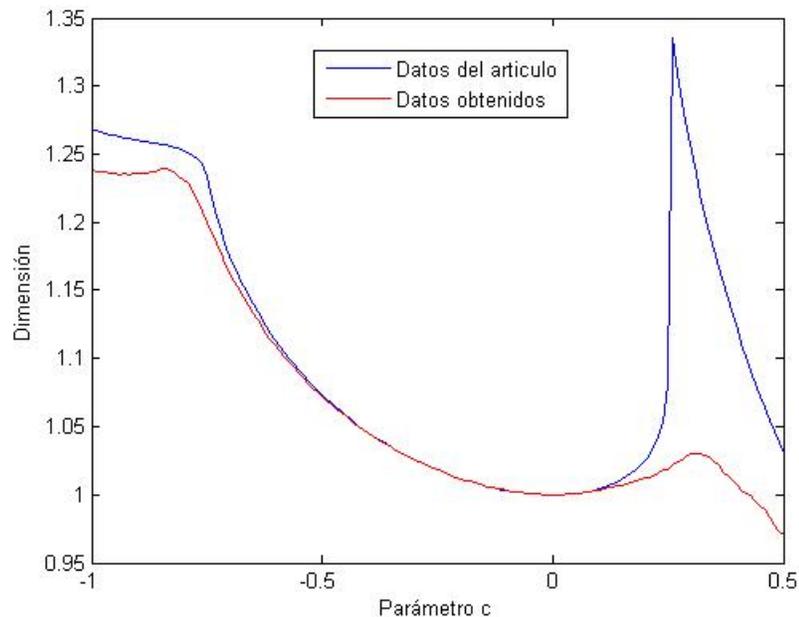


Figura 4. Resultados

188 **6. Conclusión**

189 La implementación realizada del algoritmo del valor propio resulta ser buena cuan-
190 do estamos lejos de los puntos parabólicos. En el caso de los puntos parabólicos la
191 gráfica muestra que no es suficiente con 15 refinamientos para tener una buena apro-
192 ximación.

193 **Referencias**

- 194 [CG] L. Carleson y T. Gamelin. Complex Dynamics. Springer Verlag, New York, 1993.
- 195 [DH] A. Douady y J. Hubbard. *Étude dynamique des polynômes complexes*. Publication
196 Mathématiques d'Orsay. **84-02**, (1984); **85-04**, (1985).
- 197 [DH1] A. Douady y J. Hubbard. *On the dynamics of polynomial-like mappings*. Ann.
198 Sci. Éc. Norm. Sup. **18**, (1985), 287-344.
- 199 [F] K.J. Falconer. The Geometry of Fractal Sets, Cambridge University Press, 1986.
- 200 [McMI] C. McMullen. Complex Dynamics and Renormalization. Annals of Math. Studies.
201 135, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994.
- 202 [McMII] C. McMullen. Hausdorff dimension and conformal dynamics II: Geometrically finite
203 rational maps. (2000).
- 204 [McMIII] C. McMullen. Hausdorff dimension and conformal dynamics III: Computation of
205 dimension , (3 October, 1997).
- 206 [YS] Yousef Saad. Numerical Methods For Large Eigenvalue Problems. Second Edition
207 (2011). Copyright c 2011 by the Society for Industrial and Applied Mathematics.

C	Dimensión	C	Dimensión	C	Dimensión
-1	1.238230261570372	-0.49	1.069174605080386	0.01	1.000036520086807
-0.99	1.237503116447702	-0.48	1.066180432600220	0.02	1.000147485485110
-0.98	1.236738259279410	-0.47	1.063329814735704	0.03	1.000332648341485
-0.97	1.236624393537107	-0.46	1.060519851321605	0.04	1.000591214371774
-0.96	1.236110481404346	-0.45	1.057830194029373	0.05	1.000927225856155
-0.95	1.235714613159132	-0.44	1.055150724392707	0.06	1.001327265440687
-0.94	1.234918995099595	-0.43	1.052618326239044	0.07	1.001774065399689
-0.93	1.235868799805229	-0.42	1.050139339307166	0.08	1.002295162883558
-0.92	1.235229710494063	-0.41	1.047759935213936	0.09	1.002920625170306
-0.91	1.235982941971945	-0.40	1.045439753483014	0.10	1.003580588312506
-0.90	1.236173755827735	-0.39	1.043177090452683	0.11	1.004375397845424
-0.89	1.236236086400171	-0.38	1.040996823132633	0.12	1.005186318860651
-0.88	1.236198250724078	-0.37	1.038876440124611	0.13	1.005595765503397
-0.87	1.236669151305255	-0.36	1.036827390492677	0.14	1.006363166968242
-0.86	1.236754408442349	-0.35	1.034842042617591	0.15	1.006981558208376
-0.85	1.239348307967562	-0.34	1.032907919686972	0.16	1.008035806012729
-0.84	1.239458228725746	-0.33	1.031041845625748	0.17	1.008971717279800
-0.83	1.237936645286500	-0.32	1.029232289774987	0.18	1.010324436552111
-0.82	1.236452912832750	-0.31	1.027488087390097	0.19	1.010976917597795
-0.81	1.233938350957957	-0.30	1.025799779421059	0.20	1.012124892724910
-0.80	1.231510298289047	-0.29	1.024166192584293	0.21	1.012022428445073
-0.79	1.228509407368284	-0.28	1.022588886311539	0.22	1.013442143279990
-0.78	1.222865909037167	-0.27	1.021065990718448	0.23	1.015793149740554
-0.77	1.216133892576907	-0.26	1.019598647939895	0.24	1.017891249743886
-0.76	1.208257377788834	-0.25	1.018185319818470	0.25	1.018712755684201
-0.75	1.199665133275158	-0.24	1.016825867405088	0.26	1.021572668833654
-0.74	1.192579724910072	-0.23	1.015518965192826	0.27	1.024229508142071
-0.73	1.184750387588984	-0.22	1.014263177280671	0.28	1.025753391926040
-0.72	1.177108335311563	-0.21	1.013059719354071	0.29	1.028605796668323
-0.71	1.169776703141098	-0.20	1.011907655461748	0.30	1.029606929476524
-0.70	1.162878583590309	-0.19	1.010806590614697	0.31	1.029661815540167
-0.69	1.156445780729831	-0.18	1.009756499738739	0.32	1.029946371639856
-0.68	1.151494451275344	-0.17	1.008757183808201	0.33	1.028371572382480
-0.67	1.144861739109748	-0.16	1.007808835811351	0.34	1.027728998895472
-0.66	1.139049734005525	-0.15	1.006911490848764	0.35	1.024019333772121
-0.65	1.133544995828333	-0.14	1.006065383824099	0.36	1.022280109215879
-0.64	1.128375625657019	-0.13	1.005270792135627	0.37	1.016579220253434
-0.63	1.123068514584886	-0.12	1.004528144898976	0.38	1.013277705198617
-0.62	1.118417331302997	-0.11	1.003837904340094	0.39	1.010694840784445
-0.61	1.113575609713527	-0.10	1.003200751731702	0.40	1.006582989629795
-0.60	1.109256270655140	-0.09	1.002617456179517	0.41	1.003077770585606
-0.59	1.104763880941846	-0.08	1.002088921690511	0.42	1.001351817826262
-0.58	1.100664897157140	-0.07	1.001616214895419	0.43	0.999343773864736
-0.57	1.096689450407363	-0.06	1.001200577123539	0.44	0.995435959975065
-0.56	1.092787197311546	-0.05	1.000843421128412	0.45	0.992048015825639
-0.55	1.088944250062198	-0.04	1.000546366597485	0.46	0.988668465534664
-0.54	1.085322550568237	-0.03	1.000311258299256	0.47	0.983066619246687
-0.53	1.081885987375350	-0.02	1.000140190926475	0.48	0.977223427029974
-0.52	1.078515150899487	-0.01	1.000035540441686	0.49	0.972774756926819
-0.51	1.075238041779572	-0.00	0.999999999999996	0.50	0.970436605582346
-0.50	1.072155097487715				

Figura 5. Dimensión

C	Dimensión	C	Dimensión	C	Dimensión
-1	1.2683	-0.49	1.0702	0.01	1.0000
-0.99	1.2671	-0.48	1.0671	0.02	1.0001
-0.98	1.2661	-0.47	1.0641	0.03	1.0003
-0.97	1.2652	-0.46	1.0612	0.04	1.0006
-0.96	1.2643	-0.45	1.0584	0.05	1.0009
-0.95	1.2635	-0.44	1.0557	0.06	1.0014
-0.94	1.2628	-0.43	1.0530	0.07	1.0020
-0.93	1.2621	-0.42	1.0505	0.08	1.0026
-0.92	1.2614	-0.41	1.0481	0.09	1.0034
-0.91	1.2608	-0.40	1.0457	0.10	1.0043
-0.90	1.2603	-0.39	1.0434	0.11	1.0054
-0.89	1.2597	-0.38	1.0412	0.12	1.0066
-0.88	1.2592	-0.37	1.0390	0.13	1.0080
-0.87	1.2586	-0.36	1.0369	0.14	1.0096
-0.86	1.2581	-0.35	1.0349	0.15	1.0114
-0.85	1.2575	-0.34	1.0330	0.16	1.0135
-0.84	1.2568	-0.33	1.0311	0.17	1.0159
-0.83	1.2560	-0.32	1.0293	0.18	1.0187
-0.82	1.2552	-0.31	1.0275	0.19	1.0219
-0.81	1.2541	-0.30	1.0258	0.20	1.0257
-0.80	1.2529	-0.29	1.0242	0.21	1.0302
-0.79	1.2513	-0.28	1.0226	0.22	1.0358
-0.78	1.2494	-0.27	1.0210	0.23	1.0431
-0.77	1.2468	-0.26	1.0196	0.24	1.0537
-0.76	1.2430	-0.25	1.0182	0.25	1.0812
-0.75	1.2342	-0.24	1.0168	0.26	1.3355
-0.74	1.2170	-0.23	1.0155	0.27	1.3093
-0.73	1.2046	-0.22	1.0142	0.28	1.2879
-0.72	1.1939	-0.21	1.0130	0.29	1.2690
-0.71	1.1844	-0.20	1.0119	0.30	1.2518
-0.70	1.1757	-0.19	1.0108	0.31	1.2357
-0.69	1.1677	-0.18	1.0097	0.32	1.2206
-0.68	1.1602	-0.17	1.0087	0.33	1.2063
-0.67	1.1531	-0.16	1.0078	0.34	1.1927
-0.66	1.1465	-0.15	1.0069	0.35	1.1796
-0.65	1.1402	-0.14	1.0060	0.36	1.1671
-0.64	1.1343	-0.13	1.0052	0.37	1.1551
-0.63	1.1286	-0.12	1.0045	0.38	1.1435
-0.62	1.1232	-0.11	1.0038	0.39	1.1324
-0.61	1.1180	-0.10	1.0032	0.40	1.1216
-0.60	1.1131	-0.09	1.0026	0.41	1.1111
-0.59	1.1084	-0.08	1.0020	0.42	1.1010
-0.58	1.1039	-0.07	1.0016	0.43	1.0912
-0.57	1.0995	-0.06	1.0012	0.44	1.0817
-0.56	1.0954	-0.05	1.0008	0.45	1.0724
-0.55	1.0914	-0.04	1.0005	0.46	1.0635
-0.54	1.0875	-0.03	1.0003	0.47	1.0547
-0.53	1.0838	-0.02	1.0001	0.48	1.0462
-0.52	1.0802	-0.01	1.0000	0.49	1.0380
-0.51	1.0767	-0.00	1.0000	0.50	1.0299
-0.50	1.0734				

Figura 6. Dimensión