

Generación de campos de viento por métodos variacionales. *

Jorge López López †

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, DACB

Daniel Chablé Hernández ‡

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, DACB

L. Héctor Juárez Valencia §

Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa

Este trabajo considera los aspectos computacionales de la aplicación del método de elemento finito para la solución de un problema elíptico bidimensional con condiciones de frontera mixtas. Además se muestra cómo estas ideas se pueden aplicar para la aproximación numérica de campos de viento, aunque las posibilidades de aplicación son variadas pues problemas elípticos de este tipo intervienen en la solución de problemas más complicados tales como las ecuaciones de difusión, de Stokes y de Navier-Stokes, por citar algunos.

The matter of this work are some computational aspects of the application of finite element method to the numerical solution of a 2D elliptic problem with elementary mixed boundary conditions. Additionally it is showed how this ideas are applied to interpolate wind vector field, but there is a wide range of application where this elliptic problem appears, such as in the numerical solution of diffusion equation, Stokes and Navier-Stokes equations.

Palabras clave: Elípticos, Elemento Finito, Matrices Definidas Positivas, Cholesky, Métodos Variacionales, Campos de Viento.

Keywords: Elliptic, Finite Element, Positive Definite Matrix, Cholesky, Variational Methods, Wind Vector Field.

1. Introducción

Este trabajo considera los aspectos computacionales de la aplicación del método de elemento finito para la solución numérica de un problema elíptico con condiciones de frontera mixtas de la forma

$$-\nu\Delta u + \alpha u = f, \text{ en } \omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

$$u = g_0 \text{ sobre } \gamma_0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g_1 \text{ sobre } \gamma_1, \quad (3)$$

*Recibido el 30 de agosto de 2007 y aceptado el December 5, 2007

†**Dirección postal:** Carr. Cunduacán-Jalpa Km 1, Cunduacán Tabasco, México. A.P. 24 C.P. 86690. Tel.(+52)914 336-0928. **Correo electrónico:** jorge.lopez@dacb.ujat.mx

‡**Dirección postal:** Carr. Cunduacán-Jalpa Km 1, Cunduacán Tabasco, México. A.P. 24 C.P. 86690. Tel.(+52)914 336-0928. **Correo electrónico:** danielchable@hotmail.com

§**Dirección postal:** Av. San Rafael Atlixco 186 Col. Vicentina, CP 09340, México, D.F. Tel.(+52)55 5724-4600. **Correo electrónico:** hect@xanum.uam.mx

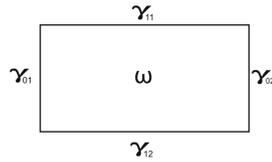


Figura 1. Un dominio ω rectangular.

donde ω es un rectángulo abierto cuya frontera $\gamma = \partial\omega$ es la unión disjunta de γ_0 y γ_1 . Ver figura 1. Asimismo, se aplican estas ideas para aproximar campos de viento.

El problema elíptico que se considera es además, parte medular en la solución de problemas más complicados tales como las ecuaciones de difusión, de Stokes y de Navier-Stokes y como se mostrará en un artículo en preparación, en la solución numérica de problemas tipo Stefan. Este trabajo está organizado de la siguiente manera: primeramente se plantea la formulación variacional del problema elíptico (1)-(3), asociándole una versión discreta que corresponde al método de elemento finito, la cual es equivalente a un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz A es rara, simétrica y definida positiva. Finalmente se describe una manera de calcular y almacenar A . De A se almacenan los elementos diferentes de cero y solo algunos de los ceros de A . Se usa para esto un arreglo lineal. Se lleva a cabo la factorización de Choleski de A y con esta se resuelve el sistema lineal. Para concluir se plantea la aplicación para la generación de campos de viento bidimensionales a partir de datos discretos. Lo que se expondrá en el artículo en preparación sobre problema de Stefan mostrará otra línea de aplicación.

2. Formulación Variacional

Se está interesado en resolver el problema elíptico (1)-(3) utilizando el método de elemento finito. Para hacer esto es necesario primero obtener lo que se denomina la formulación variacional del problema. Esto implica utilizar ciertos espacios de funciones, los espacios de Sobolev, algunos de los cuales son espacios de Hilbert. Definimos estos espacios enseguida. Note que aquí ω no está restringido a ser un rectángulo.

Definición.-Sea $\omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto con frontera γ y sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\omega)$ se define por

$$W^{1,p}(\omega) = \{u \in L^p(\omega) \mid \exists g_1, \dots, g_n \in L^p(\omega) \text{ tal que} \\ \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi, \forall \varphi \in C_c^\infty(\omega), \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Se introduce notación para un caso especial:

$$H^1(\omega) = W^{1,2}(\omega) \quad \text{y} \quad H_0^1(\omega) = \{v \in H^1 \mid v = 0 \text{ sobre } \gamma\}.$$

Para $u \in W^{1,p}(\omega)$ se denota

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \quad \text{y} \quad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = \text{grad } u.$$

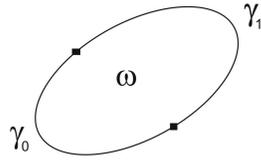


Figura 2. Un dominio ω no trivial.

El espacio $W^{1,p}(\omega)$ está dotado de la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\omega)} = \|u\|_{L^p(\omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\omega)},$$

en donde

$$\|u\|_{L^p(\omega)} = \left[\int_{\omega} |u|^p \right]^{1/p};$$

o también de la norma equivalente

$$\left(\|u\|_{L^p(\omega)}^p + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\omega)}^p \right)^{1/p}.$$

El espacio $H^1(\omega)$ está dotado del producto escalar

$$(u, v)_{H^1(\omega)} = (u, v)_{L^2(\omega)} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\omega)};$$

la norma asociada

$$\|u\|_{H^1(\omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

En [7], capítulos VIII y IX, pueden encontrarse pruebas para las siguientes afirmaciones relativas a los espacios de Sobolev:

Proposición.-El espacio $H^1(\omega)$ es un espacio de Hilbert separable.

Definición.-Sea $1 \leq p \leq \infty$; $W_0^{1,p}(\omega)$ designa el cierre de $C_c^1(\omega)$ en $W^{1,p}(\omega)$. Se denota

$$H_0^1(\omega) = W_0^{1,2}(\omega) = \{v \in H^1 \mid v = 0 \text{ sobre } \gamma\}.$$

$H_0^1(\omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar en H^1 .

Considérese entonces el problema elíptico (1)-(3) con $f \in C(\omega)$ y ω abierto acotado como se ilustra en la figura 2. Una solución clásica de este problema es una función

$u \in C^2(\omega) \cap C(\bar{\omega})$ que verifica las ecuaciones (1)-(3). Sin embargo, desde el punto de vista de la aproximación numérica es mucho pedir que u se encuentre en $C^2(\omega)$. Por otro lado, puede resultar que f no necesariamente sea continua o que f sea una función generalizada como la delta de Dirac para las cuales no necesariamente existe solución clásica. Esto motiva que en lugar de resolver el problema (1)-(3) se defina

$$V = \{v \in H^1(\omega) : v = g_0 \text{ sobre } \gamma_0\}$$

y

$$W = \{v \in H^1(\omega) : v = 0 \text{ sobre } \gamma_0\},$$

y entonces se resuelva el problema: Encontrar $u \in V$ tal que

$$\nu \int_{\omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dy + \alpha \int_{\omega} u v dx dy = \int_{\omega} f v dx dy + \int_{\gamma_1} g_1 v d\gamma, \forall v \in W \quad (4)$$

A (4) se le conoce como la formulación débil de (1)-(3) y una función u que satisface (4) se llama una solución débil de (1)-(2). Obsérvese que se resuelve un problema integral en lugar de un problema diferencial.

Si $f \in L^2(\omega)$, se aplica entonces el teorema de Stampachia (ver [7], pp. 176) con $H = H^1(\omega)$ y se concluye que existe una única solución (4) y que

$$u = \min_{v \in V} \left\{ \frac{1}{2} (\nu \int_{\omega} |\nabla v|^2 + \alpha \int_{\omega} v^2 - 2 \int_{\omega} f v - 2 \int_{\gamma_1} g_1 v) \right\}. \square \quad (5)$$

A la ecuación (5) se le conoce como la formulación variacional de (1)-(3).

Así que existe una única solución débil para el problema (1)-(3) y se tiene que si f y g_0 y g_1 son suficientemente suaves (continuas, por ejemplo), entonces la solución débil también es la solución clásica.

3. Espacios de elemento finito

En esta sección nos restringiremos al caso de que ω sea un rectángulo como el descrito en la introducción. Una vez obtenida la formulación variacional para el problema elíptico, para obtener una aproximación por elemento finito es necesario tomar espacios V_h y W_h de dimensión finita contenidos en los espacios V y W que intervienen en la formulación variacional. Un espacio V_h se forma de la siguiente manera:

EF1.-Se hace una discretización del dominio ω por medio de triángulos K satisfaciendo (ver figura 3)

1) $\bar{\omega} = \cup K$.

2) $\overset{\circ}{K}_i \cap \overset{\circ}{K}_j = \phi$ para $i \neq j$. ($\overset{\circ}{K}$ = interior de K).

3) Si K_i y K_j son adyacentes dos de sus vértices deben coincidir, es decir, no se permite que un vértice de K_i sea punto interior de una arista de K_j .

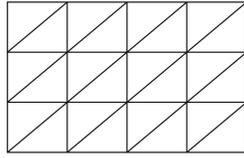


Figura 3. Una discretización de ω .

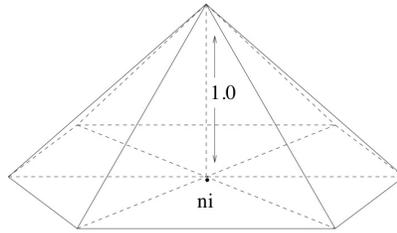


Figura 4. Función base local v_i^h .

EF2.-Se define un espacio V_h y los elementos que serán base para tal espacio. Con la triangulación anterior de ω la cual se denota por τ_h se asocian la siguiente definición y los siguientes espacios de dimensión finita:

Definición.-Si $K \in \tau_h$ entonces se define a h_K como el diámetro del triángulo K , esto es, la longitud del lado más largo de K . Igualmente se define ρ_k como el diámetro del círculo inscrito en K . Se define

$$h = \max_{K \in \tau_h} h_K.$$

Definición.-Para $K \in \tau_h$ y $\omega \subset \mathbb{R}^2$ se define

$$P_1(K) = \{p : K \rightarrow \mathbb{R} \mid p(x, y) = a + bx + cy\},$$

$$H_h(\omega) = \{v \in C^0(\omega) : v|_K \in P_1(K), \forall K \in \tau_h\},$$

$$V_h(\omega) = \{v \in H_h(\omega) : u_h = g_0 \text{ sobre } \gamma_0\},$$

$$W_h(\omega) = \{v \in H_h(\omega) : v(n_j) = 0, \forall n_j \in \gamma_0\}.$$

La base de H_h son las funciones v_i^h que están en H_h y que toman los siguientes valores:

$$v_i^h(n_j) = \delta_{ij}$$

para n_j un vértice o nodo de la triangulación τ_h . Si se etiquetan los vértices de 1 a N , entonces la base de H_h consta de tantos elementos como nodos tenga la triangulación. La base de W_h se obtiene al quitar de la base de H_h las funciones v_i^h asociadas con los nodos que pertenecen a γ_0 . Es fácil ver que las v_i^h son linealmente independientes y que cualquier función $u \in H_h$ se puede escribir como una combinación lineal de ellas, esto es, $\{v_i^h\}_{i=1}^N$ es una base para H_h . En la figura 4 se ilustra una función base v_i^h .

Al espacio H_h que se forma con los pasos anteriores se le llama un espacio de elemento finito. Una vez hecho lo anterior se sustituye V_h por V y W_h por W en la formulación variacional (4) para obtener el problema discreto asociado:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } u_h \in V_h \text{ tal que} \\ a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle, \forall v_h \in W_h, \end{cases} \quad (6)$$

donde

$$a(u_h, v_h) = \nu \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h + \alpha \int_{\Omega} u_h v_h$$

y

$$\langle f, v_h \rangle = \int_{\Omega} f v_h + \int_{\gamma_1} g_1 v_h d\gamma.$$

Asumiendo que $\{v_1^h, \dots, v_n^h, v_{n+1}^h, \dots, v_N^h\}$ es la base para H_h y $\{v_1^h, \dots, v_n^h\}$ es la base para W_h se tiene que si $u = (u_1, \dots, u_N)$ es el vector de aproximación para la solución u :

$$u_j = u_h(n_j), \quad j = 1, \dots, N.$$

para n_j el nodo j de la discretización de ω entonces $u_j = g_0(n_j)$ para $j = n+1, \dots, N$,

$$u_h = \sum_{j=1}^N u_j v_j^h,$$

y que las u_j deben satisfacer

$$\sum_{j=1}^n u_j a(v_i^h, v_j^h) = \langle f, v_i^h \rangle - \sum_{j=n+1}^N u_j a(v_i^h, v_j^h), \quad i = 1, \dots, n, \quad (7)$$

o equivalentemente

$$Au = b, \quad (8)$$

donde $a_{ij} = a(v_i^h, v_j^h)$ y $b_i = \langle f, v_i^h \rangle - \sum_{j=n+1}^N u_j a(v_i^h, v_j^h)$. La matriz A es simétrica y positiva definida, por lo cual el vector solución u existe y es único, así que la aproximación u_h a la solución u existe y es única. Para el cálculo de los elementos de la matriz A se hace uso de la propiedad de aditividad de la integral y de la forma en que se discretizó el dominio ω :

$$a_{ij} = \sum_{K \in \tau_h} \int_K (\nu \nabla v_i^h \cdot \nabla v_j^h + \alpha v_i^h v_j^h).$$

Nótese que $a_{ij} = 0$ si el nodo n_j no es vértice de algún triángulo del que n_i sea vértice. En la sección 4 se describen con más detalle los cálculos para obtener la discretización del dominio ω , la matriz A y el vector b .

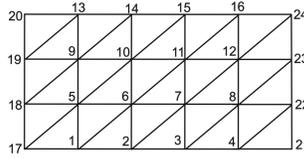


Figura 5. Etiquetación de nodos globales.

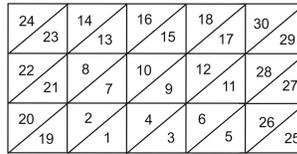


Figura 6. Etiquetación de triángulos.

4. Detalles computacionales

Con las ideas anteriores se desarrolló un programa en Fortran 95 llamado ELIG0G1SKY, el cual incluye los detalles que se mencionan en esta sección . En primer lugar se muestra cómo se calcularon la matriz A y el vector b de (8). El cálculo eficiente de A tiene que ver con la discretización de ω , o mejor dicho, con la forma de etiquetar cada nodo y con la forma de identificar cada triángulo o elemento de la discretización; esto implica etiquetar cada triángulo y saber que nodos lo forman. A continuación se describe cómo se etiquetaron nodos y triángulos para este trabajo. Las mallas utilizadas son como las que se muestran en las figuras 5 y 6, en las que se muestran la etiquetación de nodos y triángulos, las cuales siguen las siguientes reglas:

R1.- Se numeran primero los nodos que no pertenecen a γ_0 . La numeración de estos nodos, que llamaremos interiores, avanza de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba. Luego se numeran los nodos de γ_0 , a los que llamaremos nodos Dirichlet, yendo de abajo hacia arriba.

R2.- Se numeran primero los triángulos que no tienen vértices en γ_0 . La regla para la numeración de estos triángulos, que llamaremos interiores se deduce al observar la numeración mostrada en la figura 6. Luego se continúa con los triángulos que llamaremos Dirichlet, que son los que tienen algún vértice en γ_0 . Se recorren de abajo hacia arriba.

Una vez definida la forma de la malla debe asociarse con cada triángulo los nodos que lo definen identificándolos localmente como 1, 2 y 3. Para los dos tipos de triángulo que intervienen, los nodos locales están situados como se muestra en la figura 7.

Entonces, para tener bien definido cada triángulo de la discretización debe conocerse la relación entre nodos locales y nodos globales. Por ejemplo, para el triángulo 9 en

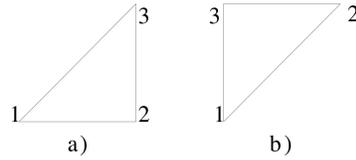


Figura 7. Etiquetación de nodos locales.

la figura 6 se tiene

- nodo local 1 = nodo global 6,
- nodo local 2 = nodo global 7,
- nodo local 3 = nodo global 11,

La etiquetación de triángulos y nodos globales, así como el cálculo de las coordenadas de los nodos globales, relación de nodos globales con locales para cada triángulo y nodos frontera se hace automáticamente, solamente especificando el número de triángulos en la base NTB y el número de triángulos en la altura NTH del dominio. En el apéndice, algoritmo 1, mostramos el código en Fortran 95 que establece la relación entre nodos locales y globales, la cual se guarda en el arreglo NODO:

Cálculo de A .

Veamos cómo ayuda esto al cálculo de A . Ya se definió en la sección 3 la base $\{v_i\}_1^N$ para H_h , la cual satisface

$$v_i(n_j) = \delta_{ij},$$

donde n_j representa al nodo j de la triangulación τ_h para ω , y se considera que

$$v_i|_K = a_k + b_k x + c_k y,$$

para cada $K \in \tau_h$. Se sabe que las funciones base locales se pueden definir en términos de las coordenadas de los nodos que definen K . Se sabe también que

$$a_{ij} = a_\Omega(v_i, v_j) = \sum_{K \in \tau_h} a_K(v_i, v_j) = \sum_{K \in \tau_h} \int_K (\alpha v_i v_j + \nu \nabla v_i \cdot \nabla v_j) dx.$$

Entonces los cálculos se hacen elemento por elemento y se acumulan al respectivo a_{ij} . Por ejemplo, al hacer los cálculos sobre el triángulo 9, sólo contribuirá a

$$\begin{array}{ccc} a_{6,6} & a_{6,7} & a_{6,11} \\ a_{7,6} & a_{7,7} & a_{7,11} \\ a_{11,6} & a_{11,7} & a_{11,11} \end{array}$$

Pero puesto que la forma bilineal $a_\Omega(\cdot, \cdot)$ es simétrica, solo es necesario calcular la participación para

$$\begin{array}{ccc} a_{6,6} & & \\ a_{7,6} & a_{7,7} & \\ a_{11,6} & a_{11,7} & a_{11,11} \end{array}$$

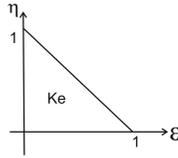


Figura 8. Elemento maestro Ke. Falta

Es decir, se calcula solo la parte inferior de la matriz A . Un detalle importante es que la matriz A es rala y bandeada (depende de la etiquetación de nodos), así que para su almacenamiento y procesamiento se utiliza lo que se conoce como almacenamiento "sky line" (ver [17]) cuya idea básica es almacenar de cada renglón solo desde el primer elemento diferente de cero hasta la diagonal. Cada una de estas partes se almacena en un arreglo lineal conforme al orden de los renglones. Esto implica el uso de un apuntador PP, tal que PP(i) indica la posición del arreglo lineal en que se guarda al elemento $A(i, i)$. La factorización de Cholesky se hace utilizando la banda y el almacenamiento lineal de A . La estructura de A , es decir, el apuntador PP se calcula con el algoritmo 2 que se muestra en el apéndice.

Hasta aquí solo se ha definido la estructura para A . Falta calcular los valores numéricos a_{ij} que van en cada una de sus entradas. Para cada a_{ij} , deben calcularse integrales de la forma $\int_K (v_i v_j) dx$ e integrales de la forma $\int_K \nabla v_i \cdot \nabla v_j dx$, donde K es cada uno de los elementos de la triangulación. Para el cálculo de $\int_K (v_i v_j) dx$ se usa un elemento maestro K^e en donde hacer los cálculos. Este se muestra en la figura 8.

La transformación afín involucrada aquí es la definida por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_K \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

donde $T_K = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}$ y (x_i, y_i) son las coordenadas del nodo local i . Obsrvese que el vértice $(0,0)$ del elemento maestro se transforma en el nodo local 1, el vértice $(1,0)$ del elemento maestro se transforma en el nodo local 2 y el vértice $(0,1)$ del elemento maestro se transforma en el nodo local 3.

Las funciones base locales en K , en términos de las coordenadas de los nodos locales son

$$v_1^K(x, y) = \frac{1}{2Area(K)} [x_2 y_3 - y_2 x_3 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y]$$

$$v_2^K(x, y) = \frac{1}{2Area(K)} [x_3 y_1 - y_3 x_1 + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \tag{10}$$

$$v_3^K(x, y) = \frac{1}{2Area(K)} [x_1 y_2 - y_1 x_2 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \tag{11}$$

y las funciones base locales en K^e son

$$v_1^e(\varepsilon, \eta) = 1 - \varepsilon - \eta$$

$$v_2^e(\varepsilon, \eta) = \varepsilon$$

$$v_3^e(\varepsilon, \eta) = \eta$$

y se tiene que

$$\begin{aligned} \int_K (v_i^K v_j^K) dx &= \int_{K^e} (v_i^e v_j^e) |\det(T_K)| d\varepsilon d\eta = \\ &= |\det(T_K)| \int_{K^e} (v_i^e v_j^e) d\varepsilon d\eta = \frac{|\det(T_K)|}{24} \begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

Si previamente se han calculado los gradientes de las funciones base locales de cada triángulo y las áreas de los triángulos, lo cual se puede hacer a partir de (10), así como el valor absoluto del determinante de las transformaciones T_K , que se puede obtener como $2 * Area(K)$, se tiene el resultado de la integral anterior y además el de $\int_K \nabla v_i \cdot \nabla v_j dx$, pues su valor es $(\nabla v_i \cdot \nabla v_j) Area(K)$. Por lo cual solo es necesario acumular el resultado en la posición adecuada del vector donde se guarda la matriz A . Esto se hace con el algoritmo 3 del apéndice, en el cual también se ha incluido la participación del triángulo K a la última sumatoria del lado derecho en (7), es decir, se ha calculado parte del vector b , que aquí se ha llamado VINTFV.

Factorización de A.

Para la factorización de Choleski de A se supone que la factorización es $A = LL^T$ y lo que debe tomarse en cuenta es que si los primeros s elementos del renglón i de A son cero entonces los primeros s elementos del renglón i de L también serán cero. Esto implica que la matriz L se puede almacenar en el mismo arreglo que A y con el mismo apuntador PP. Además, debido a la forma de almacenamiento de A , debe usarse un algoritmo para Choleski que calcule L renglón por renglón.

Cálculo de $\int_{\Omega} f v_i dx$, para cada $i = 1, \dots, n$.

Otra contribución para el lado derecho b son las integrales $\int_{\Omega} f v_i dx$, para el cálculo de las cuales se considera que f es una función definida en cada nodo de la triangulación de ω . Entonces se puede escribir

$$f = \sum_{j=1}^N f_j v_j,$$

donde f_j representa el valor de f en el nodo j : $f_j = f(n_j)$. Así que

$$\int_{\Omega} f v_i dx = \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^N f_j v_j \right) v_i dx = \sum_{j=1}^N f_j \int_{\Omega} v_i v_j dx.$$

Puede entonces escribirse el vector

$$\begin{pmatrix} \int_{\Omega} f v_1 dx \\ \vdots \\ \int_{\Omega} f v_n dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \int_{\Omega} v_1 v_1 dx + f_2 \int_{\Omega} v_1 v_2 dx + \dots + f_N \int_{\Omega} v_1 v_N dx \\ \vdots \\ f_1 \int_{\Omega} v_n v_1 dx + f_2 \int_{\Omega} v_n v_2 dx + \dots + f_N \int_{\Omega} v_n v_N dx \end{pmatrix}, \quad (12)$$

el cual es otra contribución a VINTF. Luego utilizando otra vez la aditividad de la integral sobre el dominio de integración y puesto que para cada elemento o triángulo

K de la discretización existen tres funciones base locales v_i^K se debe calcular

$$\int_K v_l^K v_p^K dx,$$

para $l = 1, 2, 3, p = 1, 2, 3$ y para cada triángulo K . Los índices l y p denotan funciones base locales o nodos locales por lo cual l y p tienen asociados sus respectivos nodos globales o funciones base globales. Sean i, j los nodos globales asociados con los índices l y p , respectivamente. Entonces el valor

$$f_i \int_K v_l^K v_p^K dx,$$

se acumula a la componente j del vector en (12) y el valor

$$f_j \int_K v_l^K v_p^K dx,$$

se acumula a la componente i del vector en (12). De acuerdo a estas fórmulas, el vector b se va ensamblando simultáneamente con el cálculo de la matriz A , teniendo en cuenta que el vector b tiene solo n componentes.

La última participación para b son las integrales de la forma

$$\int_{\gamma_1} g_1 v_h d\gamma.$$

Las cuales son integrales de línea y se pueden calcular numéricamente.

Debe notarse que aunque los dominios considerados en este trabajo son rectangulares, y las mallas son estructuradas, lo cual obedece a que estos se pueden generar automáticamente sin muchas complicaciones, los demás detalles no tienen esta limitante, es decir, funcionarían para una malla no estructurada sobre un dominio irregular. La aplicación al problema de Stefan, en preparación, aclarará más este punto.

5. Generación de campos de viento

Dado un campo de velocidades u^0 en un dominio $\omega \subset R^2$, ver figura 9, obtenido por interpolación de un conjunto de valores discretos proporcionado por medio de una red meteorológica deseamos encontrar un campo ajustado u tan cercano como sea posible al campo inicial u^0 en algún sentido, y que satisfaga

$$\begin{aligned} \nabla \cdot u &= 0 \text{ en } \omega, \\ u \cdot \hat{n} &= 0 \text{ sobre } \Gamma_N. \end{aligned}$$

Definiendo los espacios $L_2(\omega) = L_2(\omega) \times L_2(\omega)$.

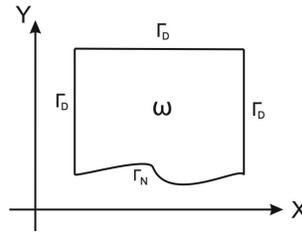


Figura 9. Dominio ω para campo de viento.

$H(\text{div}; \omega) = \{v \in \mathbf{L}_2(\omega) : \nabla \cdot v \in L_2(\omega)\}$
 $V = \{v \in H(\text{div}; \Omega) : \nabla \cdot u = 0 \text{ y } v \cdot \hat{n} = 0 \text{ sobre } \Gamma_N\}$
 y usando la métrica

$$\|u\|_{S,\Omega} = \left(\int u^T S u dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in V$$

asociada al producto interior

$$\langle u, v \rangle_{S,\Omega} \equiv \int_{\Omega} u^T S v dx, \quad \forall u, v \in V$$

donde S es una matriz simétrica y definida positiva, entonces el problema se puede formular como

$$u = \min_{v \in V} \|v - u^0\|_{S,\Omega}$$

ó

$$u = \min_{v \in V} J(v) = \min_{v \in V} \frac{1}{2} \|v - u^0\|_{S,\Omega}^2$$

Puede probarse (ver [12]) que la u buscada satisface

$$S(u - u^0) = \nabla \lambda,$$

para λ en $H^1(\omega)$, $\lambda = 0$ en Γ_D , ya que $V^\perp = \{\nabla q : q \in H^1(\omega), q = 0 \text{ en } \Gamma_D\}$. Así que u y λ satisfacen

$$Su - \nabla \lambda = S u^0 \text{ en } \omega,$$

$$\lambda = 0 \text{ sobre } \Gamma_D,$$

$$u \cdot \hat{n} = 0 \text{ sobre } \Gamma_N,$$

$$\nabla \cdot u = 0 \text{ en } \omega.$$

A partir de esto puede formularse el siguiente problema elíptico para λ :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (S^{-1}\nabla\lambda) = \nabla \cdot u^0 \text{ en } \omega \\ \lambda = 0 \text{ sobre } \Gamma_D \\ -S^{-1}\nabla\lambda \cdot \hat{n} = u^0 \cdot \hat{n} \text{ sobre } \Gamma_N \end{cases} \quad (13)$$

La formulación variacional para este problema resulta ser: Encontrar $\lambda \in H_D^1(\omega) = \{q \in H^1(\omega) : q = 0 \text{ en } \Gamma_D\}$ tal que

$$\int_{\omega} S^{-1}\nabla\lambda \cdot \nabla q dx = - \int_{\omega} u^0 \cdot \nabla q dx, \forall q \in H_D^1(\omega) \quad (14)$$

Se sabe que (13) y (14) tienen solución única si Γ_D tiene medida mayor a cero. En consecuencia, u está determinada de manera única via la ecuación

$$u = u^0 + S^{-1}\nabla\lambda. \quad (15)$$

A partir del programa para resolver (2)-(3), se desarrolló un programa para resolver (14), dada la similitud entre los dos problemas. Note que basta con numerar nodos y triángulos como se muestra en las figuras 10 y 11, cambiando solo el número de nodos interiores n , tomar $\alpha = 0$ y $\nu = 1$, tomar en cuenta el efecto de S en el cálculo de A , y calcular el lado derecho. En este caso γ_0 es Γ_D y γ_1 es Γ_N . Los elementos de la matriz A son

$$a_{ij} = \sum_{K \in \tau_h} \int_K (\nu \nabla v_i^h \cdot (S^{-1}\nabla v_j^h) + \alpha v_i^h v_j^h),$$

aunque en realidad la expresión es más simple pues como ya se dijo, $\alpha = 0$ y $\nu = 1$, mientras que los elementos de b están dados por

$$b_i = - \int_{\omega} u^0 \cdot \nabla v_i dx - \sum_{j=n+1}^N \lambda_j a(v_i^h, v_j^h),$$

los cuales se pueden calcular fácilmente ya que la sumatoria es cero y considerando a cada componente de u^0 en cada triángulo K como combinación lineal de las funciones base locales: para cada función base local v_l^h con $l = 1, 2, 3$ se calcula

$$\begin{aligned} \sum_{d=1}^3 \{u_{1d}^0 \int_K v_d^h \frac{\partial v_l^h}{\partial x}\} + \sum_{d=1}^3 \{u_{2d}^0 \int_K v_d^h \frac{\partial v_l^h}{\partial y}\} &= \frac{\partial v_l^h}{\partial x} \sum_{d=1}^3 \{u_{1d}^0 \int_K v_d^h\} \\ &\quad + \frac{\partial v_l^h}{\partial y} \sum_{d=1}^3 \{u_{2d}^0 \int_K v_d^h\} \\ &= \frac{\partial v_l^h}{\partial x} \frac{Area(K)}{3} \sum_{d=1}^3 u_{1d}^0 \\ &\quad + \frac{\partial v_l^h}{\partial y} \frac{Area(K)}{3} \sum_{d=1}^3 u_{2d}^0 \end{aligned}$$

pues

$$\begin{aligned} \int_K v_d^K &= \int_{K^e} (v_d^e) |\det(T_K)| d\varepsilon d\eta = \\ &= |\det(T_K)| \int_{K^e} v_d^e d\varepsilon d\eta = \frac{|\det(T_K)|}{6} = \frac{Area(K)}{3}, \end{aligned}$$

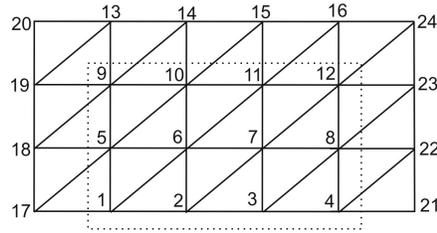


Figura 10. Etiquetación de nodos problema de viento.

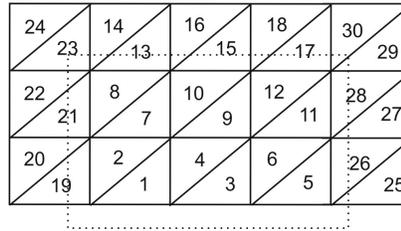


Figura 11. Etiquetación de triángulos problema de viento.

y se acumula a b_i , donde i es el número de nodo global asociado con el nodo local l .

Se tomó $u=(x,-y)$ como campo de prueba y se ejecutó el programa tomando $u^0 = (x, 0)$, con $\omega = (1, 2) \times (0, 1)$. Se considera $S = \begin{pmatrix} S_1^2 & 0 \\ 0 & S_2^2 \end{pmatrix}$. En las figuras 12 y 13 se muestran las curvas de nivel y la gráfica de la solución aproximada de λ , respectivamente. La solución aproximada se obtuvo con $h = 1/80$, es decir, con una malla de 80×80 y con $\epsilon = \frac{S_1^2}{S_2^2} = 10^6$.

A partir de esta aproximación para λ se obtiene el campo ajustado u utilizando la ecuación (15). En la figura 14 se muestra el campo ajustado (a partir de la primera componente). Para este campo se calculó, en cada punto de la malla, de manera aproximada, la divergencia, obteniéndose un valor máximo del orden de 10^{-6} , resultado aceptable si se toma en cuenta que el campo exacto tiene divergencia cero. En la figura 15 se muestra la diferencia entre el campo exacto y el ajustado, resaltando de esta figura la discrepancia en las fronteras izquierda y derecha, la cual se debe a la condición de frontera impuesta sobre λ .

Agradecimientos

Deseamos manifestar nuestro agradecimiento al Dr. Marco A. Núñez y M.C. Ciro F. Flores, de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa, por su valiosa contribución a este trabajo.

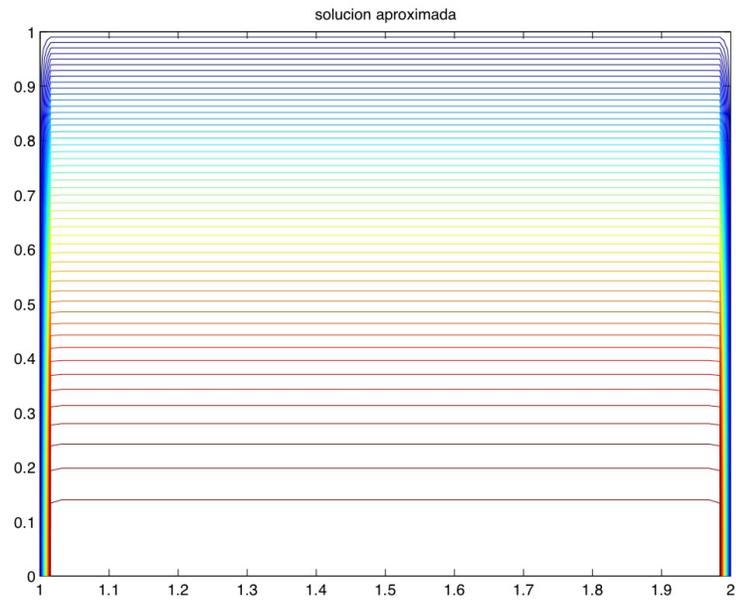


Figura 12. Curvas de nivel para la solución aproximada de λ .

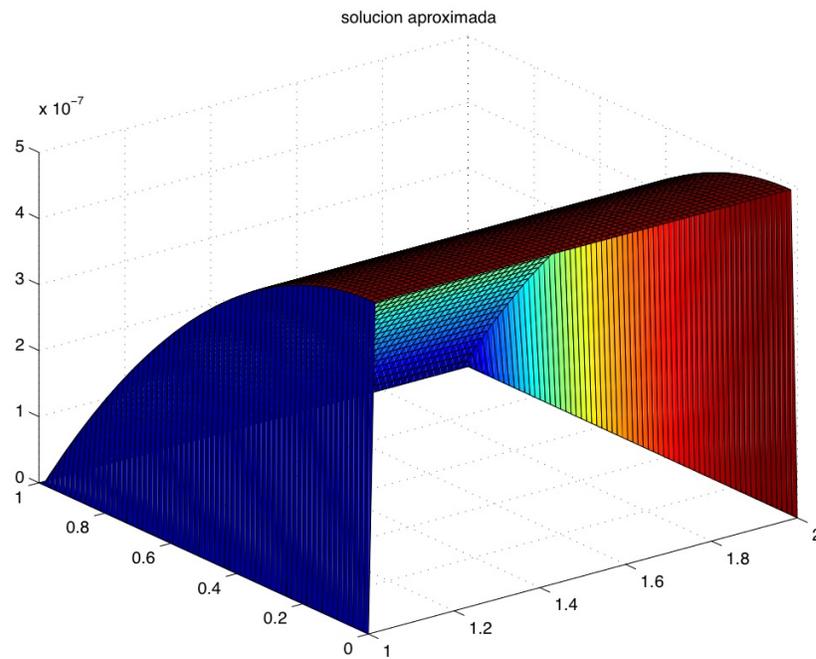


Figura 13. Solución aproximada para λ .

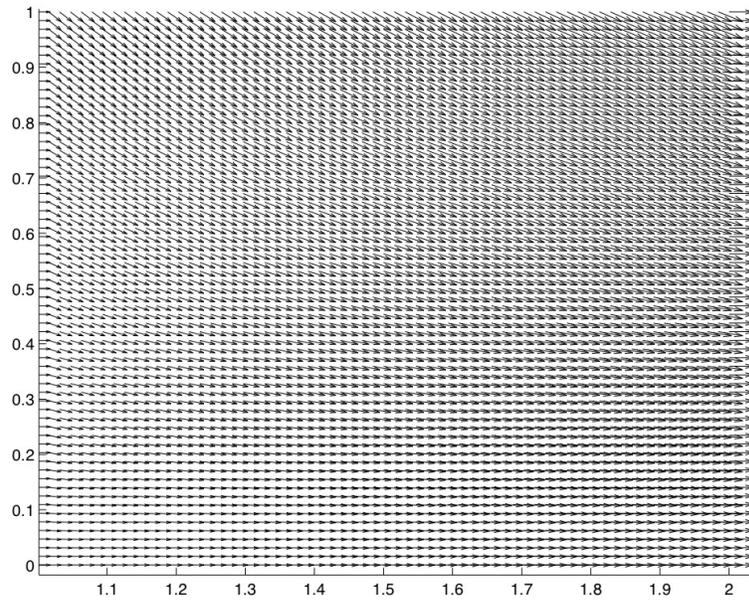


Figura 14. Solución aproximada para el campo u .

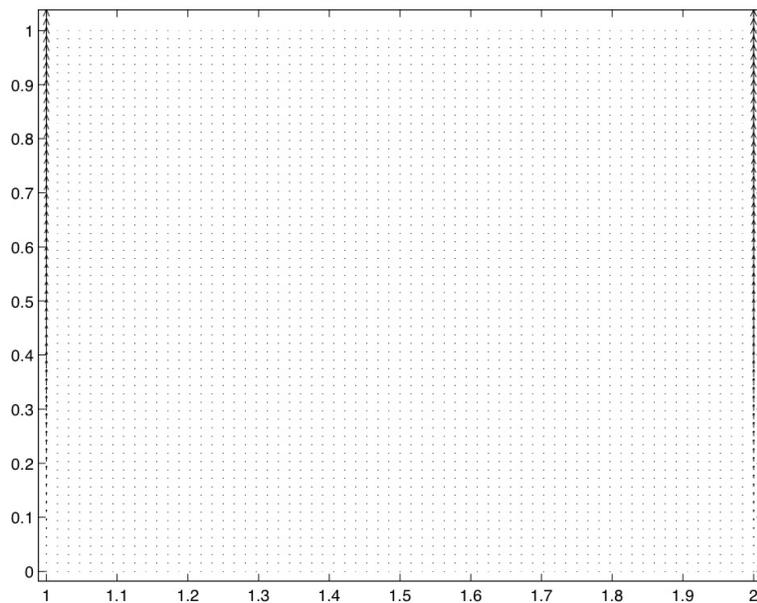


Figura 15. Diferencia entre el campo exacto y el campo ajustado.

Apéndice**A. Algoritmo 1:**

Listado 1. Para calcular las coordenadas de los nodos, numerarlos local y globalmente, estableciendo la relación entre nodos locales con globales.

Entrada:

ntb : número de triángulos en la base.
 nth : número de triángulos en la altura.
 xa : primera coordenada del vértice inferior izquierdo de omega.
 ya : segunda coordenada del vértice inferior izquierdo de omega.
 ha,hb : separación de los nodos en la base y en la altura de omega.

Salida:

coor(i,j) : la coordenada i del nodo j.
 nodo(i,j) : nodo global al que corresponde el nodo i del triángulo j.

Inicio instrucciones:

*! se calculan las coordenadas de los nodos:
 ! interiores y newman*

```
do i=0,nth
  do j=1,ntb-1
    coor(1,((ntb-1)*i + j))=xa + j*hb
    coor(2,((ntb-1)*i + j))=ya + i*ha
  end do
end do

! frontera dirichlet
do i=1,nth+1
  coor(1,(ntb-1)*(nth+1) + i)=xa
  coor(2,(ntb-1)*(nth+1) + i)=ya + (i-1)*ha
end do

do i=1,nth+1
  coor(1,ntb*(nth+1) + i)=xa + ntb*hb
  coor(2,ntb*(nth+1) + i)=ya + (i-1)*ha
end do

! se establece la relacion entre nodos locales con nodos globales.
! triangulos interiores:

do i=0,nth-1
  indt=2*(ntb-2)*i
  do j=1,ntb-2
```

```

        numt=indt + 2*j
        indn=numt/2 + i
        nodo(1,numt-1)=indn
        nodo(2,numt-1)=indn+1
        nodo(3,numt-1)=indn+ntb
        nodo(1,numt)=indn
        nodo(2,numt)=indn+ntb
        nodo(3,numt)=indn+ntb-1
    end do
end do

! triangulos frontera izquierda:

indt=2*(ntb-2)*nth
indn=(ntb-1)*(nth+1)
do i=1,nth
    numt=indt + 2*i
    nodo(1,numt-1)=indn + i
    nodo(2,numt-1)=(i-1)*(ntb-1) + 1
    nodo(3,numt-1)=i*(ntb-1) + 1
    nodo(1,numt)=indn + i
    nodo(2,numt)=i*(ntb-1) + 1
    nodo(3,numt)=indn + i + 1
end do

! triangulos frontera derecha:

indt=2*(ntb-1)*nth
indn=ntb*(nth+1)
do i=1,nth
    numt=indt + 2*i
    nodo(1,numt-1)=(ntb-1)*i
    nodo(2,numt-1)=indn + i
    nodo(3,numt-1)=indn + i + 1
    nodo(1,numt)=(ntb-1)*i
    nodo(2,numt)=indn + i + 1
    nodo(3,numt)=(ntb-1)*(i+1)
end do
fin del algoritmo 1.

```

B. Algoritmo 2

Listado 2. Para calcular el apuntador de A, o lo que es lo mismo, definir la estructura de A.

Entrada:

npi : número de nodos interiores.
 ntriai : número de triángulos interiores.
 nodo(i,j) : nodo global al que corresponde el nodo i del

triángulo j.

Salida:

pp(i) : posición de arreglo lineal en la que está
A(i, i).

Inicio instrucciones:

```

do i=0, npi
  pp(i)=0
end do
pp(1)=1
do l=1, ntria
  no1=nodop(1, l)
  no2=nodop(2, l)
  no3=nodop(3, l)
  n1=min(no1, no2, no3)
  n3=max(no1, no2, no3)
  if((no1.ne.n1).and.(no1.ne.n3)) n2=no1
  if((no2.ne.n1).and.(no2.ne.n3)) n2=no2
  if((no3.ne.n1).and.(no3.ne.n3)) n2=no3
  pp(n2)=max(pp(n2), n2-n1+1)
  pp(n3)=max(pp(n3), n3-n1+1)
end do
do i=1, npi
  pp(i) = pp(i) + pp(i-1)
end do
fin del algoritmo 2.

```

C. Algoritmo 3:

Listado 3. Para calcular y almacenar la matriz A. Se almacena en un arreglo lineal

Entrada:

npi : número de puntos interiores.
ntria : número de triángulos.
nodo(i, j) : nodo global al que corresponde el nodo i
del triángulo j.
derux(i, j) : derivada con respecto a x de la función base
local i del triángulo j.
deruy(i, j) : derivada con respecto a y de la función
base local i del triángulo j.
pp : apuntador de A.
dc1 : valor de alfa en la ecuación elíptica.
dc2 : valor de nu en la ecuación elíptica.
darea(i) : area del triángulo i.

Salida:

dap(i) : las componentes de la matriz A de acuerdo

al apuntador pp.
 vintfv(i) : participación de los nodos frontera al lado derecho

Inicio instrucciones:

```

do it=1,ntria
  do i=1,3
    ind=nodop(i , it)
    dxg=derpx(i , it)
    dyg=derpy(i , it)
    do j=1,3
      jn=nodop(j , it)
      if (jn.le.ind) then
        if ((jn.le.npi).and.(ind.le.npi) ) then
          dt2=derpx(j , it)*dxg+derpy(j , it)*dyg
          dt1=1./6.
          if (jn.ne.ind) dt1=0.5*dt1
          ip=pp(ind)-(ind-jn)
          dap(ip)=dap(ip)+(dc1*dt1+dc2*dt2)*darea(it)
        else
          if ( (jn.le.npi).and.(ind.gt.npi)) then
            dt2=derpx(j , it)*dxg+derpy(j , it)*dyg
            dt1=1./12.
            vintfv(jn)=vintfv(jn)-(dc1*dt1+dc2*dt2)*&
              darea(it)*evgxy(dcoor(1 , ind) , dcoor(2 , ind))
          end if
        end if
      end do
    end do
  end do
end do

```

fin del algoritmo 3.

D. Algoritmo 4

Listado 4. Para encontrar la factorización de Cholesky de A. Se almacena en el mismo arreglo lineal que contenía a A.

Entrada:

dafac(i) : las componentes de la matriz A de acuerdo al apuntador pp.
 npa : apuntador de A.
 mn : número de puntos interiores o de renglones de A.

Salida:

dafac(i) : las componentes de la factorización de A de acuerdo al apuntador pp.

Inicio instrucciones:

```

dafac(1)=dsqrt(dafac(1))
l2=npa(1)
do nod=2,nn
  dxii=0.d0
  l1=l2+1
  l2=npa(nod)
  l2j=l1-l2+nod-1
  do ij=l1,l2-1
    j=ij-l2+nod
    l1j=l2j+1
    l2j=npa(j)
    jid=l2-l2j-nod+j
    dsum1=0.d0
    do kj=max(l1j,l1-jid),l2j-1
      dsum1=dsum1+dafac(kj)*dafac(kj+jid)
    end do
    dafac(ij)=(dafac(ij)-dsum1)/dafac(l2j)
    dxii=dxii+dafac(ij)*dafac(ij)
  end do
dafac(l2)=dsqrt(dafac(l2)-dxii)
end do

```

Fin del algoritmo 4.

Referencias

- [1] Marco A. Núñez, Ciro F. Flores, L. Héctor Juárez, *A Study of hydrodynamic mass-consistent models*, Journal of Computational Methods in Science and Engineering, 6 (4-5), pp. 365-385, 2006.
- [2] Marco A. Núñez, Ciro F. Flores, L. Héctor Juárez, *Interpolation of Hydrodynamic Velocity with the Continuity Equation*, Journal of Computational Methods in Science and Engineering, Artículo aceptado para su publicación.
- [3] R. Glowinski, T-W Pan, J. Periaux, *A Fictitious Domain Method for Dirichlet Problem and Applications*, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 111, 283-303, 1994.
- [4] I. Babuska and A. K. Aziz, *Survey Lectures on the Mathematical Foundations of the Finite Elements Method*, en *The Mathematical Foundations of the Finite Elements Method with Applications to Partial Differential Equations*, A. K. Aziz (Editor), Academic Press, New York, 1972.
- [5] I. Babuska, J. T. Oden and J. K. Lee, *Mixed-Hybrid Finite Element Aproximations of Second-Order Elliptic Boundary-Value Problems*, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 11, 175-206, 1977.
- [6] I. Babuska, *The Finite Element Method with Lagrange Multipliers*, Numer. Math., 20, 179-192. 1973.
- [7] H. Brezis, *Análisis funcional. Teoría y aplicaciones*, Alianza Editorial, 1978.

- [8] F. Brezzi, On the Existence, *Uniqueness and Approximation of Saddle-Point Problems Arising from Lagrangian Multipliers*, Revue Francaise d'Automatique Informatique et Recherche Operationnelle Nume. Anal. R2, 129-151, 1974.
- [9] F. Brezzi, M. Fortin, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [10] P. G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland, 1978.
- [11] I. Ekeland, R. Temam, *Convex Analysis and Variational Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1976.
- [12] V. Girault, P. A. Raviart, *Finite Element methods for Navier-Stokes Equations*, Springer, Berlin, 1986.
- [13] G. F. Carey and J. T. Oden, *FINITE ELEMENTS: A first Course*, Prentice-Hall, 1983.
- [14] G. F. Carey and J. T. Oden, *FINITE ELEMENTS: A Second Course*, Prentice-Hall, 1983.
- [15] G. F. Carey and J. T. Oden, *FINITE ELEMENTS: Mathematical Aspects*, Prentice-Hall, 1983.
- [16] R. Glowinski, O. Pironneau, *Numerical Methods for the biharmonic equation and for the two-dimensional Stokes problem*, SIAM Review 21. 1979, 167-212.
- [17] A. Perronnet, *Les Methodes de Resolution des Systemes Lineaires. Leur Technique de Storage*, Universite Pierre et Marie Curie. LABORATOIRE ANALYSE NUMERIQUE. No. Enregistrement: 81 022.