Modelando una curva construida con una escuadra

Eliseo Keneth Jiménez Segovia*, Ricardo Arias Palacios, Yessenia Rincón Torres, Juan Carlos González Aguirre, Jorge López López

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, México

Recibido el 14 de diciembre de 2014 y aceptado el 20 de marzo de 2015

Tómese un punto C en el plano, una recta l que no pase por el punto, elíjase un punto Q sobre la recta l constrúyase la perpendicular al segmento PQ que pase Q; repítase este proceso variando el punto Q sobre toda la recta l, dejando fijo a P. La problemática es, ¿Qué curva queda bosquejada por estas rectas? En este artículo presentamos un modelo que describe no solo el tipo de curva, si no también su ecuación. Luego de obtenido el modelo matemático se plantea la solución y se valida con el software Goemeter's Sketchpad.

Give a point P in the plane, a straigth line l what dont's contains P, take a point Q in l, construct a perpendicular line to PQ and trhought Q; repeat this proceses varing the point Q along l and fixing P. The problem is, what curve is limited by these perpendicular lines? In this paper we describe a model that allow us to know not only the kind of curve but his equation too. After the mathematic model is obtained and we obtain his solution, final validation is does with comertial Goemeter's Sketchpad software

Palabras clave: Curva, Pendiente, Recta tangente, Foco, Mediatriz.
Keywords: curve, slope, straight Tangent, focus, directive.

1. Introducción

La motivación principal para escribir este breve artículo es brindarle al estudiante un ejemplo didáctico de la aplicación del cálculo diferencial en la modelación de un problema geométrico definido. El concepto de función cubre gran parte del contenido

***Dirección postal**: Carr. Cunduac´an-Jalpa Km 1, Cunduacán Tabasco, M´exico. A.P. 24 C.P. 86690. Tel.(+52)914 336-0928. **Correo electrónico**: kennet.700@hotmail.com

del curso de cálculo con el cual se puede desarrollar el proceso de modelación desde el punto de vista geométrico. Más aún, se pueden exponer razonamientos matemáticos en forma ágil y atractiva a través de las funciones para modelar matemáticamente un fenómeno de la vida real, describir y analizar relaciones de ciertas propiedades del fenómeno sin necesidad de hacer a cada momento una descripción verbal o un cálculo complicado de cada uno de los sucesos que estamos observando. La modelación relacionada con sistemas de representaciones integra los siguientes objetos: símbolos, signos, figuras, gráficas y construcciones geométricas. Éstos expresan el concepto y suscriben en sí mismos el modelo con el cual es posible interpretar y predecir comportamientos del proceso de estudio. Los modelos matemáticos proveen una visión del procesamiento de la situación funcional. Con estos modelos matemáticos se puede ampliar la visión de las perspectivas que se tienen acerca de las funciones.

La modelación es la representación de un objeto matemático que está vinculado a una situación real. Modelar significa construir una representación de algo, a partir de un grupo de experiencias. Se considera a la modelación matemática como una alternativa de transferencia dinámica del conocimiento desde situaciones geométricas hasta la estructuración mental en el proceso de aprendizaje. En el proceso de modelación se produce la distinción de variables y la relación entre estas variables, los cuales a su vez impulsa la deducción de otras propiedades de el objeto a modelar.

Los modelos matemáticos son complicados en el sentido de aislar el problema que se esté tratando dentro de un contexto real. Sin embargo, el uso de las matemáticas planteadas desde contextos reales es imprescindible para la generación, formación y entendimiento de conceptos que se hayan involucrados en el objeto de estudio. El problema que nos concierne en este breve artículo es el de modelar un proceso geométrico en el cual se considera un punto y una recta en el plano que no contenga el punto mencionado de tal forma que con una escuadra geométrica se procede de manera que el vértice correspondiente al ángulo de $90°$ se halle sobre la recta mientras uno de sus catetos contenga el punto elegido, consiguientemente se traza la recta que va del vértice y sobre el otro cateto de la escuadra que no contiene el punto. Se repite este proceso, en principio, indefinidamente para todos los puntos de la recta, sin embargo en la práctica se hace para un número finito de veces para puntos sobre la recta. Posteriormente procedemos a modelar nuestro problema de hallar el tipo de curva que se limita con los trazos cuya solución será sometida a validación de manera que se confirmen las cualidades particulares que posee nuestro problema sujeto a modelación.

2. Modelo

Dado un punto C en el espacio y una recta l donde $C \notin l$. Tómese cualquier $Q \in l$. Con una escuadra unamos los puntos C y Q a través del cateto opuesto y tracemos el segmento de recta sobre el cateto adyacente, es decir, la recta perpendicular al segmento $\overline{CQ}$ que pasa por Q, como se ve en la figura 1.

Salvo traslaciones y rotaciones podemos ver la figura 1 como la figura 2.

Si repetimos el proceso anterior sobre puntos diferentes de la recta l obtendremos una curva delimitada por las rectas que unen nuestro punto C con el cateto adyacente de la escuadra que estamos utilizando. Ver Figura 3.

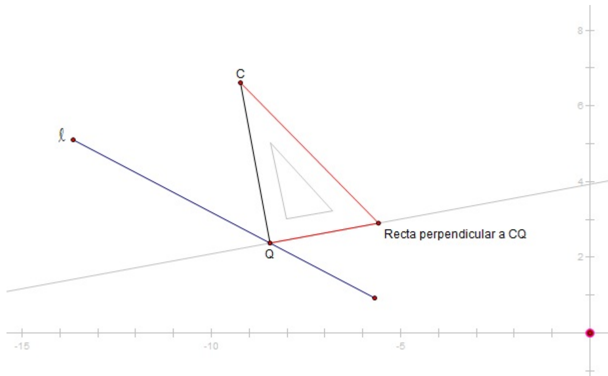

Figura 1. Forma de construcción de las rectas que bosquejan la curva.

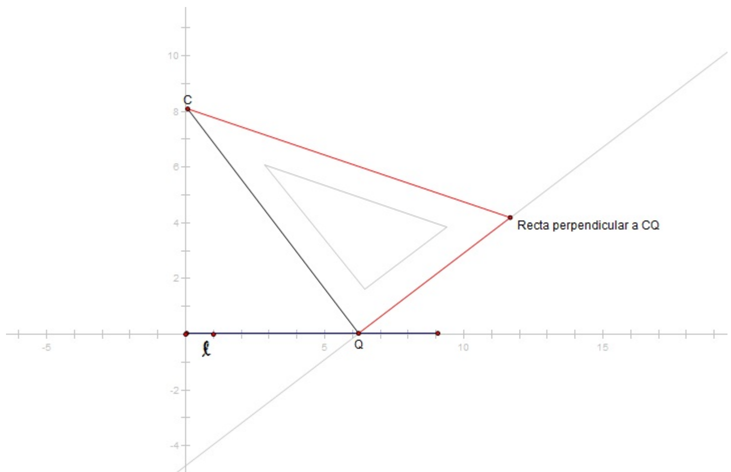

Figura 2. Traslación al los ejes del esquema de la figura 1.

2.1 Desarrollo del modelo

Haremos el desarrollo para una situación como la que se presenta en la figura 2 para obtener un modelo que nos ayude a encontrar la ecuación de la curva que está delimitada por las rectas perpendiculares al segmento $\overline{CQ}$ como se muestra en la figura 3.

Sea $Q = (z, 0)$ el punto de intersección del eje X con la recta l' y sea $P = (x, 0)$ en el eje X tal que $R = (x, f(x))$ es el punto donde la recta l' es tangente a la curva buscada, esto se muestra en la figura 4. Si definimos $m_{l'}$ como la pendiente de l', entonces tenemos la siguiente relación:

$$f'(x) = m_{l'} \tag{1}$$

de la figura 4 y usando geometría analítica podemos afirmar que

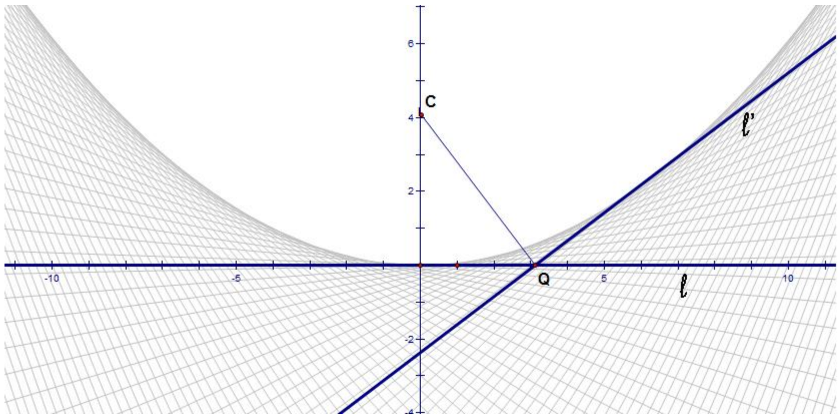

Figura 3. Barrido de la recta perpendicular a $\overline{CQ}$ a tráves de la recta l.

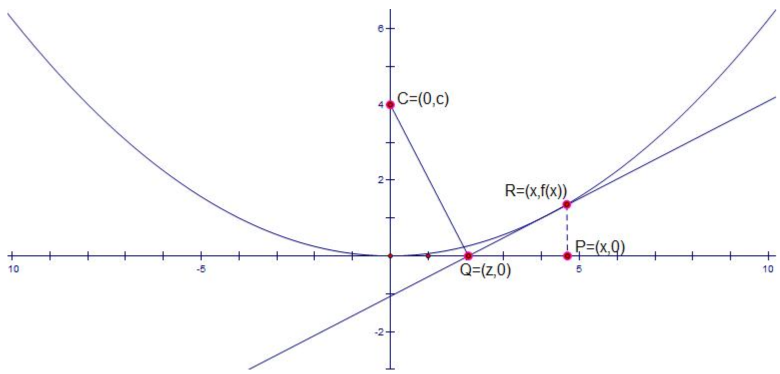

Figura 4. Esquema gráfico para la deducción del modelo.

$$m_{l'} = \frac{f(x)}{x - z} \tag{2}$$

es decir,

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x - z}$$

Notemos que los triángulos $\overline{QOC}$ y $\overline{QPR}$ son semejantes, así que tenemos la siguiente relación

$$f'(x) = m_{l'} = \frac{f(x)}{x - z} = \frac{z}{c} \tag{3}$$

Agregando la condición inicial $f(0) = 0$, se tiene el siguiente sistema:

$$f'(x) = \frac{z}{x}$$
$$f(0) = 0$$

En el sistema anterior estamos usando las coordenadas de los puntos Q y P por lo que de ahora en adelante los cálculos necesarios se harán usando las coordenadas de los puntos Q, P y R.

Lo primero que haremos es encontrar el valor de z. De las relaciones dadas en la ecuación 3 obtenemos que:

$$z^2 - zx - cf(x) = 0, \tag{4}$$

y resolviendo para z, utilizando la fórmula general se tiene

$$z = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4cf(x)}}{2}. \tag{5}$$

Para cada x dado, existe una única z ya que el punto $(z, 0)$ es el único punto de intersección de l' con el eje X, esto por que la recta l' contiene a los puntos Q y R, por lo que

$$z = \frac{x}{2}. \tag{6}$$

Sustituyendo (6) en (3), se obtiene:

$$f'(x) = \frac{x}{2c} \tag{7}$$

$$f(0) = 0.$$

3. Solución

La solución al modelo es inmediata si integramos la ecuación 7 obtenemos que la solución es

$$f(x) = \frac{x^2}{4c} \tag{8}$$

Otra manera de obtener $f(x)$ es usando la ecuación 5. Ya que lo que está dentro del radical es necesario que sea igual a cero para tener un único valor para z, si esto no se cumple tendríamos dos valores para z lo cual indicaría que tenemos dos puntos de intersección de la recta l' con el eje X y esto no es posible, por lo que afirmamos que

$$\text{Como } x^2 - 4cf(x) = 0 \text{ entonces } f(x) = \frac{x^2}{4c}$$

Nuevamente la solución a nuestro modelo es

$$f(x) = \frac{x^2}{4c}$$

que es lo que ya habíamos obtenido cuando integramos $f'(x)$ para obtener $f(x)$. Notemos que la ecuación resultante para $f(x)$ nos indica que la curva buscada es una parábola.

4. Validación

En la sección 3 obtuvimos la solución del modelo, procedamos ahora a la validación de éste. Esto lo haremos de dos formas: analíticamente y usando el software Geometer´s Sketchpad.

4.1 Forma analítica

Iniciamos con la corroboración de que el punto de intersección de la recta tangente a $f(x)$ en un x_0 cualquiera con el eje X, es $z = \frac{x_0}{2}$ para todo $x_0 \in l$. Además de probar que las rectas l y l' son perpendiculares para todo punto $Q = (z, 0)$ sobre la recta l.

Sea $(x_0, y_0) \in l'$ donde $y_0 = f(x_0)$, encontremos la ecuación de la recta que pasa por el punto (x_0, y_0) y tiene pendiente $m_{l'} = \frac{x_0}{2c_0}$ donde c_0 es la ordenada del punto $C = (0, c_0)$. Entonces:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m_{l'}(x - x_0) \\ y - y_0 &= \frac{x_0}{2c}(x - x_0) \\ y - \frac{x_0^2}{4c_0} &= \frac{xx_0}{2c_0} - \frac{x_0^2}{2c_0} \end{aligned}$$

Hagamos $Y(x) = y$ esto por que la ecuación anterior denota una recta y podemos ver a y como función de x, si despejamos Y(x) obtenemos

$$\begin{aligned} Y(x) &= \frac{xx_0}{2c_0} - \frac{x_0^2}{2c_0} + \frac{x_0^2}{4c_0} \\ &= \frac{xx_0}{2c_0} - \frac{x_0^2}{4c_0} \end{aligned}$$

Sea z el punto donde l' interseca al eje X. Necesitamos encontrar donde $Y(z) = 0$, hagamos $x = z$.

Luego, $Y(z) = 0$ sí y sólo sí

$$\frac{x_0}{2c_0}(z - \frac{x_0}{2}) = 0$$

esto implica que

$$z - \frac{x_0}{2} = 0$$

por lo tanto

$$z = \frac{x_0}{2}$$

Probemos que las rectas L y l' son perpendiculares, donde la recta L es la recta que conecta los puntos $(0, c)$ y $(z, 0)$ y la recta l' pasa por $(z, 0)$ y $(x, f(x))$. Hallemos la pendiente de L, esto es

$$\begin{aligned} m_L &= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{c - 0}{0 - z} \\ &= \frac{c}{-\frac{x_0}{2}} \\ &= -\frac{2c}{x_0} \end{aligned}$$

Recordemos que la pendiente de l' está dada por

$$m_{l'} = \frac{x_0}{2c}$$

Sabemos que dos rectas son perpendiculares si y solo si el producto de sus pendientes es igual a -1.

$$(m_L)(m_{l'}) = \left(-\frac{2c}{x_0}\right)\left(\frac{x_0}{2c}\right) = -1 \tag{9}$$

el producto de las pendientes efectivamente es -1 por lo que L y l' son perpendiculares.

Procedemos a verificar que el punto $C = (0, c)$ que se dio al inicio es el foco de la parábola y que la directriz de la parábola es la recta $y = -c$.

Construimos ahora la recta $y = -c$ y localizamos el punto $S = (x, -c)$, como se puede ver en la figura (5).

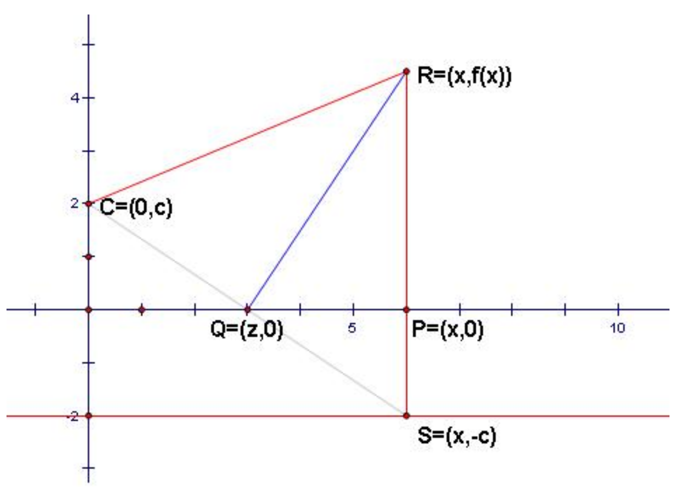

Figura 5. Visualización geométrica del foco y la directriz de la parábola.

calculamos las longitudes de los segmentos $\overline{CR}$ y $\overline{RS}$:

$$d\,(C,R) = \sqrt{x^2 + (\frac{x^2}{4c} - c)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{x^4}{16c^2} - \frac{x^2}{2} + c^2} = \sqrt{\frac{x^4}{16c^2} + \frac{x^2}{2} + c^2}$$

$$d\,(C,R) = \sqrt{(\frac{x^2}{4c} + c)^2} = \sqrt{\frac{x^4}{16c^2} + \frac{x^2}{2} + c^2}$$

Obsérvese entonces que la distancia del punto R hacia el punto C es la misma que la distancia del punto R hacia el punto S, y por lo tanto, el punto $R = (x, \frac{x^2}{4c})$ está sobre una parábola con foco en $(c, 0)$ y directriz $y = -c$.

4.2 Validación Computacional con Geometer's Sketchpad

Procedemos ahora a validar nuestros resultados con el software Geometer's Sketchpad. Para ello trazamos la recta perpendicular al segmento $\overline{CQ}$ y animamos el punto Q, es decir, dejamos que se mueva por una sección del eje X, dejando dibujada la sombra de la linea perpendicular y observemos que esta sombra dibuja perfectamente el contorno de una parábola, la parábola que dibuja es la que da solución al modelo obtenido. Esto se puede observar en la figura (6)

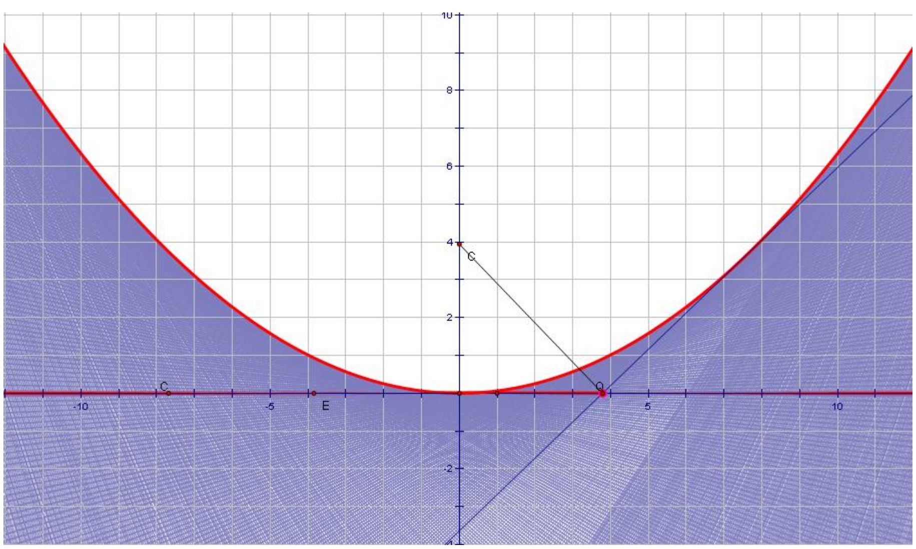

Figura 6. La parte de color azul es el barrido que deja la perpendicular a CQ, y la linea roja muestra la parábola cuya ecuación es la solución al modelo propuesto.

Entonces tanto analítica como visualmente estamos observando que la curva que se dibuja bajo el tipo de construcción planteado al inicio de la deducción del modelo es una parábola.

De la construcción del modelo, sabemos que la recta que es tangente a la curva en un punto x, corta al eje X en el punto medio entre el origen y el punto x. Visualmente podemos observar de la figura (7), que la recta que es tangente a la parábola en x

corta el eje X en el punto medio, y animando el punto x se vió que siempre se mantenía esta relación, en las gráficas (7), (8), (9) y (10) se muestran tres instantes de la animación. Note que la en la parte central superior de cada imagen se tiene los valores de las abscisas del punto x la cual es x_x y la del punto Q que es x_Q; podemos notar que en la tres figuras la abscisa del puntos x es el doble de la abscisa del punto Q, en otras palabras el punto Q es el punto medio entre el punto x y el origen.

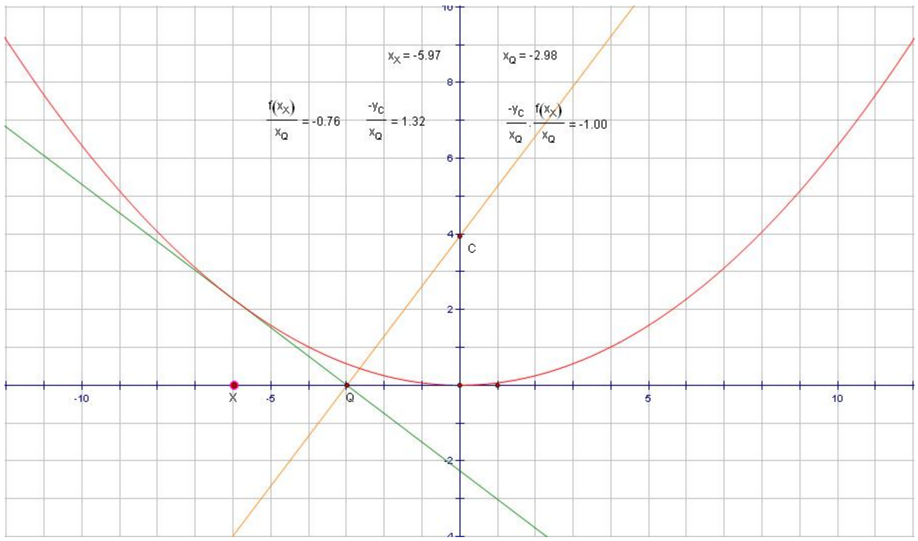

Figura 7. La recta color verde es la tangente a la parábola en el punto X, y la recta naranja es la que une los puntos C y Q

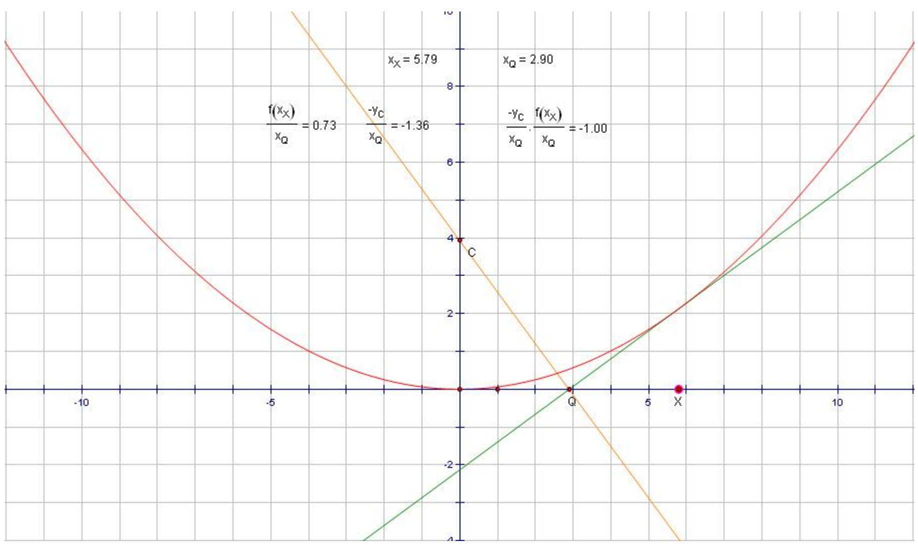

Figura 8. La recta color verde es la tangente a la parábola en el punto X, y la recta naranja es la que une los puntos C y Q

Por la manera de construir la curva con las escuadras, se tiene la hipótesis que el segmento CQ, en particular la recta que pasa por él, es perpendicular a la recta

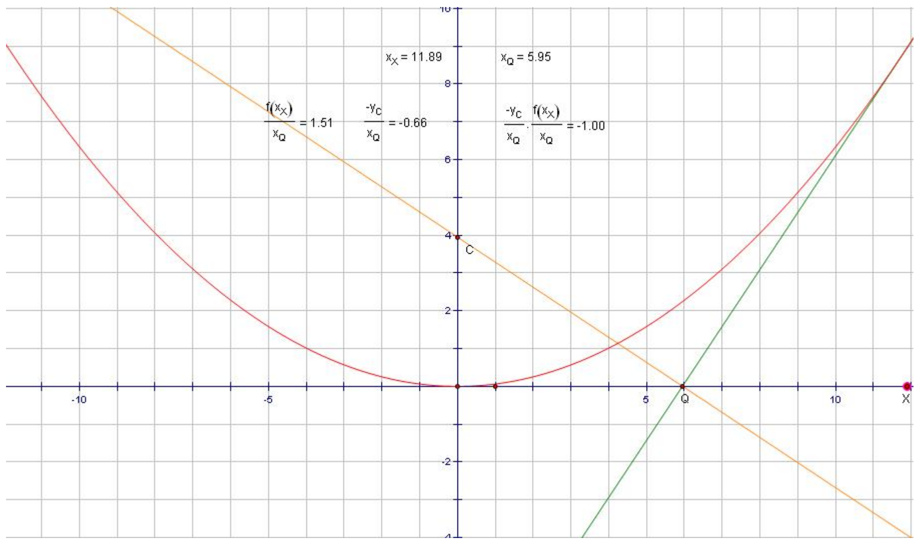

Figura 9. La recta color verde es la tangente a la parábola en el punto X, y la recta naranja es la que une los puntos C y Q

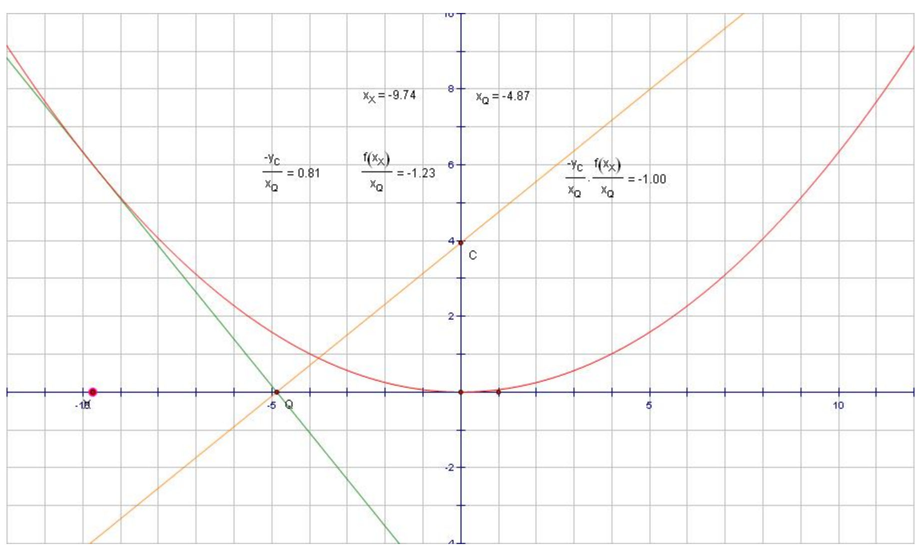

Figura 10. La recta color verde es la tangente a la parábola en el punto X, y la recta naranja es la que une los puntos C y Q

tangente a la curva en el punto x. Analíticamente esto ya se corroboro, y visualmente este fenómeno se observa en las figuras (7), (8), (9) (10). Note que en las imágenes se tienen los valores $\frac{f(x_X)}{x_Q}$, estos son los valores de la pendiente de la recta tangente a la función $f(x)$; de igual forme se tienen los valores $\frac{-y_C}{x_Q}$ y estos corresponden a las pendiente de la recta que pasa por los puntos C y Q. Y finalmente se tiene el producto de ellas, que como se puede observar siempre da como resultado -1, esto nos esta diciendo que las rectas son perpendiculares.

5. Conclusiones

De acuerdo a la forma de construir la curva, luego de desarrollar el modelo matemático que refleja su comportamiento y solucionarlo, se obtuvieron una serie de resultados los cuales fueron validados de forma analítica y computacionalmente; a continuación se enumeran los mas importantes que fueron obtenidos dentro del desarrollo que dio lugar a este trabajo.

1. La gráfica que se forma es una parábola, la cual cumple con la ecuación $f(x) = \frac{x^2}{4c}$
2. El punto $C = (0, c)$ que se da al inicio de la construcción es el foco de la parábola.
3. La directriz de la parábola es la recta $y = -c$.
4. La recta tangente a la curva en un punto $x = (x_0, 0)$ interseca al eje X en el punto $(\frac{x_0}{2}, 0)$, $\forall x$ en el eje X.
5. La recta que une los puntos C con Q es perpendicular a la recta tangente a la curva $f(x)$.

Referencias

[1] Robert J. Flowers y Israel Jesús Damián Félix *Modelos de logit*, Revista de Ciencias Básicas, UJAT, Volumen 8, Número 1, pp. 3-15, 2009.

[2] Luis Miguel Valenzuela Gómez y José Villa Morales. *Unicidad al problema de Dirchlet a través de martingalas*, Revista de Ciencias Básicas, UJAT, Volúmen 8, Número 2, pp. 57-67, 2009

[3] Pedro José Herrero Piñeyro. *Descartes*, www.cnice.mecd.es/Descartes/Geometria/Parabolas/Parabolas.html

[4] Charles H. Lehmann. *Geometría Análitca*, Limusa, 1ed; México, D.F; 2010.

[5] James Stewart. *Cálculo*, CENGAGE Learnig, 6ed; México D.F. 2008

[6] Earlw Swokowsky & Jeffery A. Cole. *Trigonométria*, Thomson, 9ed; México, D.F; 2001.