



Configuraciones Centrales de Dziobek de 5 cuerpos con masas iguales

J. L. Cornelio Soberano^{1,*}, G. Blé González¹, M. Álvarez Ramírez²

¹*División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tabasco, México*

kornelio 85@hotmail.com

²*Departamento de Matemáticas, UAM Itztapalapa, San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina, A.P 55-134, México D.F*

En este trabajo se aplica un algoritmo llamado recocido simulado para resolver polinomios que caracterizan las configuraciones centrales propuestas por Dziobek. Los polinomios resultan de buscar configuraciones centrales en el problema de 5 cuerpos con masas iguales que contengan al menos un eje de simetría.

In this paper an algorithm named simulated annealing for to solve polynomial equations than characterize central configurations proposed by Dziobek is used, Polynomial equations is obtained in the case of central configurations with axial symmetry in the 5-body problem with equal masses.

Palabras clave: Problema de n cuerpos, Configuraciones centrales, Algoritmo recocido simulado.

Keywords: The n -body problem, Central configurations, Simulated annealing algorithm.

Introducción

Uno de los problemas centrales de la Mecánica Celeste es el problema de los n cuerpos, el cual ha sido y sigue siendo de gran interés por el desarrollo teórico que ha generado. Isaac Newton en 1687 publicó en *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* la formulación matemática del problema de los n cuerpos, basándose en la ley de Gravitación Universal.

El problema de los n cuerpos para $n \geq 3$ presenta una dificultad mayor que el problema de los 2 cuerpos, y la comprensión de su dinámica aún está lejos de ser entendida.

En el problema Newtoniano de n cuerpos las soluciones periódicas más simples son aquellas tales que la configuración permanece constante bajo homotecias y rotaciones, de tal forma que cada cuerpo tiene como trayectoria una órbita elíptica. Wintner llamó a éstas *configuraciones centrales*, [W].

En 1767 Leonhard Euler publicó un trabajo sobre el problema de los 3 cuerpos [E]. Allí demostró que si tres partículas son colocadas inicialmente en la configuración de línea recta, de tal forma que la razón de sus distancias mutuas satisfacen una relación dependiente únicamente del valor de las masas, y si además, las velocidades iniciales son elegidas adecuadamente, entonces cada partícula se moverá periódicamente sobre una elipse, pero en todo momento las tres partículas se mantendrán sobre una línea recta, conservando siempre la misma razón de distancias entre ellas.

Para el caso $n = 4$, Otto Dziobek formuló el problema de configuraciones centrales en el plano, en términos de distancias mutuas y obtuvo como resultado un sistema de ecuaciones algebraicas que caracterizan estas configuraciones centrales [D]. Posteriormente, Albouy retomó esta aproximación de Dziobek y la adaptó para el estudio de configuraciones centrales con cuatro masas iguales, [A]. Recientemente Hampton y Moeckel en [HM] demostraron la finitud de las configuraciones de Dziobek para cualesquiera masas positivas.

Para el caso $n = 5$ se han obtenido diferentes resultados los cuales pueden consultarse en [Ya] y en las referencias allí citadas.

En este trabajo se presentan 4 configuraciones centrales para 5 cuerpos con masas iguales con al menos un eje de simetría. Estas soluciones son encontradas resolviendo las ecuaciones de Dziobek, la cual bajo ciertas restricciones se convierte en un sistema polinomial el cual se resuelve usando el algoritmo recocido simulado.

1. Configuraciones centrales de Dziobek en 5 cuerpos

El problema Newtoniano de los 5 cuerpos consiste en estudiar el movimiento para todo tiempo de cinco partículas con masas m_1, \dots, m_5 y vectores de posición q_1, \dots, q_5 respectivamente sujetas a la ley de gravitación de Newton. Es decir, el problema Newtoniano de 5 cuerpos consiste en resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineales

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{q}_i}{dt^2} = G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^5 m_i m_j \frac{\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|^3}, \quad (1)$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma Euclidiana. El término del lado izquierdo es debido a la segunda ley de Newton y el del lado derecho a la ley de gravitación. Luego la energía potencial del sistema es

$$U(\mathbf{q}) = \sum_{1 \leq i < j \leq 5} \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|}.$$

Usando la conservación de la energía, del momento angular y el momento lineal podemos reducir considerablemente algunos grados de libertad para el sistema pero aún es muy difícil de estudiar, por lo que es necesario buscar soluciones especiales que tengan propiedades agradables o algunas simetrías.

La conservación del momento lineal nos dice que el centro de masa se mueve en línea recta y con velocidad constante, sin pérdida de generalidad en este trabajo suponemos que el centro de masa está en el origen.

Definición 1.1. Una configuración de n partículas es una configuración central si el vector de aceleración de cada partícula es un múltiplo escalar del vector de posición de la partícula. Esto significa que existe un λ tal que $\ddot{\mathbf{q}}_i = \lambda \mathbf{q}_i$ para $i = 1, \dots, 5$.

Los astrónomos estudian estas configuraciones por al menos 2 razones. Primero, estas pueden ser utilizadas para analizar configuraciones de cuerpos celestes en el universo, un ejemplo muy conocido es la configuración central formada por el Sol, Júpiter y los asteroides Trojanos. Segundo, estas configuraciones son de gran importancia en el análisis de colisión de órbitas en sistemas gravitacionales en expansión, [W]. El siguiente resultado es demostrado en [H].

Teorema 1.2. Las configuraciones centrales son los puntos críticos de U restringido al momento de inercia constante.

Con la finalidad de definir las configuraciones centrales de Dziobek introducimos la siguiente notación. Sea q_{ij} la distancia entre la i -ésima y la j -ésima partícula $q_{ij} = \|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|$ y $s_{ij} = q_{ij}^2$ para $1 \leq i < j \leq 5$, entonces existen 10 de estas distancias. Usando estas distancias formamos la llamada matriz de Cayley–Menger dada por

$$\mathbb{M} = \begin{vmatrix} 0 & q_{12}^2 & q_{13}^2 & q_{14}^2 & q_{15}^2 & 1 \\ q_{12}^2 & 0 & q_{23}^2 & q_{24}^2 & q_{25}^2 & 1 \\ q_{13}^2 & q_{23}^2 & 0 & q_{34}^2 & q_{35}^2 & 1 \\ q_{14}^2 & q_{24}^2 & q_{34}^2 & 0 & q_{45}^2 & 1 \\ q_{15}^2 & q_{25}^2 & q_{34}^2 & q_{45}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

El determinante de Cayley–Menger es igual a $((n-1)!)^2$ veces el cuadrado del hipervolumen formado por los n puntos en \mathbb{R}^{n-1} , ver [U]. En este caso $n = 5$, este determinante es proporcional al hipervolumen en \mathbb{R}^4 formada por 5 partículas, si hacemos $\mathbb{M} = 0$ tenemos una restricción para 5 partículas obligadas a moverse en \mathbb{R}^3

Podemos concluir que buscar configuraciones centrales de 5 cuerpos en el espacio afín de dimensión 3 es equivalente a calcular los puntos críticos del potencial U , bajo la restricción de que el momento de inercia I debe ser constante e igual a I_0 , mientras que el determinante de Cayley–Menger \mathbb{M} debe ser cero. Esto implica que debemos encontrar los puntos críticos de la función

$$V(q_{ij}) = U(q_{ij}) + \lambda(I(q_{ij}) - I_0) + \sigma \mathbb{M}(q_{ij}), \quad (2)$$

donde λ y σ son multiplicadores de Lagrange. Observemos que tenemos un sistema de 12 ecuaciones con 12 incógnitas λ , σ y las distancias q_{ij} .

Para obtener los puntos críticos vamos a derivar (2) con respecto a las distancias relativas, lo cual se traduce a calcular los ceros del siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{\partial V}{\partial q_{12}}, & e_2 &= \frac{\partial V}{\partial q_{13}}, & e_3 &= \frac{\partial V}{\partial q_{14}}, \\
e_4 &= \frac{\partial V}{\partial q_{15}}, & e_5 &= \frac{\partial V}{\partial q_{23}}, & e_6 &= \frac{\partial V}{\partial q_{24}}, \\
e_7 &= \frac{\partial V}{\partial q_{25}}, & e_8 &= \frac{\partial V}{\partial q_{34}}, & e_9 &= \frac{\partial V}{\partial q_{35}}, \\
e_{10} &= \frac{\partial V}{\partial q_{45}}, & e_{11} &= I - I_0, & e_{12} &= G.
\end{aligned} \tag{3}$$

Sea Δ_j el volumen del tetraedro formado por cuatro masas exceptuando a m_j . Si fijamos el orden de las masas, entonces los volúmenes con signo $\Delta_1, \dots, \Delta_5$ son los volúmenes de los cinco tetraedros orientados con vértices (m_2, m_3, m_4, m_5) , (m_3, m_4, m_5, m_1) , (m_4, m_5, m_1, m_2) , (m_5, m_1, m_2, m_3) y (m_1, m_2, m_3, m_4) , respectivamente.

Definición 1.3. Diremos que $\mathbf{q} \in (\mathbb{R}^3)^5$ es una configuración central de 5 cuerpos en \mathbb{R}^3 tipo Dziobek si existen constantes $\lambda, \sigma \in \mathbb{R}$, y un vector no nulo $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_5) \in \mathbb{R}^5$ tal que

$$\begin{aligned}
\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 &= 0, \\
\sum_{j=1}^5 \Delta_j \mathbf{q}_j &= \mathbf{0}, \\
s_{ij}^{-\frac{3}{2}} &= \frac{\lambda}{M} + \sigma \frac{\Delta_i \Delta_j}{m_i m_j}, \quad 1 \leq i < j \leq 5.
\end{aligned} \tag{4}$$

donde $M = m_1 + m_2 + \dots + m_5$.

Albouy mostró que el sistema de ecuaciones (3) es equivalente a las ecuaciones (4), [A]. En este trabajo resolveremos el sistema (3), usando el algoritmo que describimos a continuación.

2. Algoritmo recocido simulado

El algoritmo de recocido simulado (en inglés, simulated annealing algorithm), pertenece a una clase de algoritmos de búsqueda local (local search algorithms) comúnmente llamados algoritmos de umbral (threshold algorithm).

Sea (S, c) los elementos de un problema de optimización combinatoria, donde:

- S es el espacio de soluciones factibles.
- c es la función costo (a valores reales positivos).

El problema es encontrar una i en S que minimice c .

Para implementar el algoritmo se necesita además:

- Una función entorno V de i en S .

- Una sucesión $\{t_k\}$ (los llamados threshold) decreciente tal que $t_k \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

El algoritmo está definido como sigue:

Condiciones iniciales $t_0 > 0$, $i_0 \in S$, $k = 0$

While $t_k > 0$ do

Se elige $j_k \in V_{i_k}$

if $c(j_k) \leq c(i_k)$ then $i_{k+1} = j_k$ (se acepta j_k)

else

se elige (aleatoriamente) $q \in [0, 1]$

if $q < e^{\frac{c(i_k) - c(j_k)}{t_k}}$ then $i_{k+1} = j_k$

else $i_{k+1} = i_k$

se incrementa k

Endwhile

i_k

Note que en la iteración k -ésima se genera un número aleatorio q y se acepta j si $q < \exp\left[\frac{c(i) - c(j)}{t_k}\right]$.

En este caso, cada vecino de una solución tiene una probabilidad positiva de reemplazar a la solución actual. Los t_k se eligen de forma tal que a medida que avanzan las iteraciones, aceptar soluciones con grandes incrementos en el costo es menos probable (pero sigue existiendo una probabilidad positiva de aceptarlos). La sucesión t_k que usaremos es $t_k = \frac{t_0}{1+k}$.

3. Configuraciones centrales simétricas de 5 masas iguales

Las ecuaciones que definen a las configuraciones centrales de Dziobek presentan una cierta simetría entre las distancias mutuas y los volúmenes, entonces es una idea natural buscar soluciones que presenten simetría, ya que una igualdad entre los volúmenes representa un plano de simetría para la configuración, esto se debe a que si $\Delta_i = \Delta_j$, de las ecuaciones (4) tenemos que $q_{ik} = q_{jk}$ para $k = \{1, \dots, 5\} - \{i, j\}$. Por ejemplo, si $i = 1$ y $j = 2$ las partículas 1 y 2 equidistan de igual manera a las partículas 3, 4 y 5, por lo tanto hay un plano de simetría que pasa por las partículas 3, 4 y 5.

A continuación, calcularemos todas las configuraciones centrales no coplanares de 5 masas iguales que tengan al menos 2 planos de simetría, la intersección de estos planos nos dará un eje de simetría y este eje de simetría significa que la configuración es invariante con respecto a alguna rotación.

Caso 1: $\Delta_1 = 0$ y $\Delta_2 = \Delta_4$ y $\Delta_3 = \Delta_5$.

Caso 2: $\Delta_1 \neq 0$ y $\Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5$.

Caso 3: $\Delta_1 = \Delta_2$ y $\Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5$.

Caso 4: $\Delta_1 \neq \Delta_2$ y $\Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5$.

Caso 5: $\Delta_1, \Delta_2 = \Delta_3$ y $\Delta_4 = \Delta_5$.

Estos casos los hemos ordenados de menor a mayor dificultad y procedemos a encontrar las configuraciones centrales que cumplan estas condiciones de simetría.

3.1 Caso 1. $\Delta_1 = 0$ y $\Delta_2 = \Delta_4$ y $\Delta_3 = \Delta_5$.

Dado que las masas de los cuerpos son iguales entre si, sin pérdida de generalidad normalizamos las masas a 1, de ahora en adelante consideraremos $m_i = 1$ para $i = 1, \dots, 5$.

Sea $\Delta_1 = 0$, lo cual implica que el volumen del tetraedro formado por las masas (m_2, m_3, m_4, m_5) se anula y por lo tanto las masas m_2, m_3, m_4 y m_5 son coplanares. Sustituyendo en la última ecuación del sistema de ecuaciones (4) tenemos

$$q_{12} = q_{13} = q_{14} = q_{15} .$$

De las condiciones $\Delta_2 = \Delta_4$ y $\Delta_3 = \Delta_5$ y la primera ecuación del sistema de ecuaciones (4) obtenemos que $\Delta_2 = -\Delta_3$. Sustituyendo en la última ecuación del sistema de ecuaciones (4) obtenemos

$$q_{23} = q_{25} = q_{34} = q_{45} = \left(\frac{\lambda}{5} - \sigma \Delta_2^2 \right)^{-\frac{1}{3}} , \quad (5)$$

$$q_{24} = q_{35} = \left(\frac{\lambda}{5} + \sigma \Delta_2^2 \right)^{-\frac{1}{3}} .$$

Estas relaciones entre las distancias relativas implica que la configuración es una pirámide con una base rectangular, (véase figura 1).

Si normalizamos a $q_{23} = q_{25} = q_{34} = q_{45} = 1$, las cuales son las longitudes de los lados del cuadrado con vértices m_2, m_3, m_4 y m_5 , entonces se obtiene que

$$\begin{aligned} q_{24} = q_{35} &= \sqrt{2} \\ q_{12} = q_{13} = q_{14} = q_{15} &= a. \end{aligned} \quad (6)$$

Sustituyendo (6) en las ecuaciones (3), resolvemos e_1 y e_7 para λ y σ , y obtenemos

$$\lambda = \frac{5}{a^3} \quad \text{y} \quad \sigma = -\frac{a^3 - 1}{16a^3(-1 + 2a^2)} .$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación e_6 , obtenemos que la única solución real para esta ecuación es

$$a = \left(\frac{2(\sqrt{2})^3}{(\sqrt{2})^3 + 1} \right)^{\frac{1}{3}} = 1.138985517$$

Por lo tanto, existe una configuración central que cumple las condiciones del caso 1 y es mostrado en la figura 1, la cual es una pirámide con una base cuadrada.

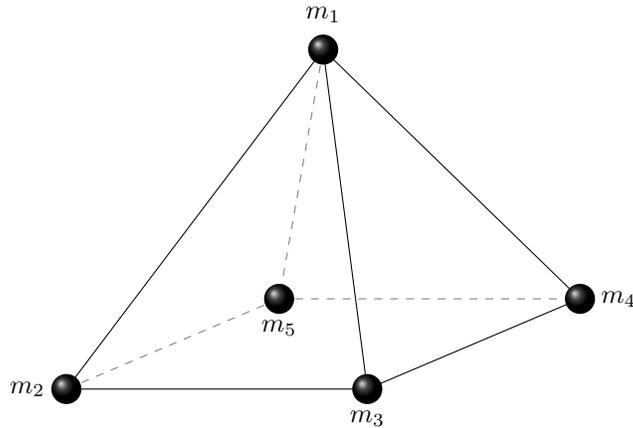


Figura 1. Configuración central de 5 cuerpos del caso 1.

3.2 Caso 2. $\Delta_1 \neq 0$ y $\Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5$.

Del sistema de ecuaciones (4) se obtiene inmediatamente que

$$\begin{aligned} q_{23} = q_{24} = q_{25} = q_{34} = q_{35} = q_{45} \\ q_{12} = q_{13} = q_{14} = q_{15}. \end{aligned} \quad (7)$$

Geoméricamente obtenemos que la configuración forma un tetraedro regular con una partícula en el centro de la pirámide, (véase la figura 2).

Para encontrar las configuraciones centrales debemos resolver el sistema (3) y para

e_1 y e_7 obtenemos

$$\begin{aligned}
 e_1 = & -\frac{1}{q_{12}^2} + \frac{1}{5}\lambda q_{12} \\
 & + \sigma(-4q_{12}^3q_{34}^4 + 8q_{12}^3q_{34}^2q_{35}^2 + 8q_{12}^3q_{34}^2q_{45}^2 - 4q_{12}^3q_{35}^4 \\
 & + 8q_{12}^3q_{35}^2q_{45}^2 - 4q_{12}^3q_{45}^4 + 8q_{12}q_{13}^2 + 4q_{12}q_{13}^2q_{24}^2q_{34}^2 \\
 & - 4q_{12}q_{13}^2q_{24}^2q_{45}^2 - 4q_{12}q_{13}^2q_{25}^2q_{34}^2 + 4q_{12}q_{13}^2q_{25}^2q_{35}^2 - 4q_{12}q_{13}^2q_{25}^2q_{45}^2 \\
 & - 4q_{12}q_{13}^2q_{34}^2q_{45}^2 - 4q_{12}q_{13}^2q_{35}^2q_{45}^2 + 4q_{12}q_{13}^2q_{45}^4 + 4q_{12}q_{14}^2q_{23}^2q_{34}^2 \\
 & - 4q_{12}q_{14}^2q_{23}^2q_{35}^2 - 4q_{12}q_{14}^2q_{23}^2q_{45}^2 + 8q_{12}q_{14}^2q_{24}^2q_{35}^2 - 4q_{12}q_{14}^2q_{25}^2q_{34}^2 \\
 & - 4q_{12}q_{14}^2q_{25}^2q_{35}^2 + 4q_{12}q_{14}^2q_{25}^2q_{45}^2 - 4q_{12}q_{14}^2q_{34}^2q_{35}^2 + 4q_{12}q_{14}^2q_{35}^4 \\
 & - 4q_{12}q_{14}^2q_{35}^2q_{45}^2 - 4q_{12}q_{23}^2q_{15}^2q_{34}^2 + 4q_{12}q_{23}^2q_{15}^2q_{35}^2 - 4q_{12}q_{23}^2q_{15}^2q_{45}^2 \\
 & - 4q_{12}q_{23}^2q_{34}^2q_{45}^2 - 4q_{12}q_{23}^2q_{35}^2q_{45}^2 + 4q_{12}q_{23}^2q_{45}^4 - 4q_{12}q_{15}^2q_{24}^2q_{34}^2 \\
 & - 4q_{12}q_{15}^2q_{24}^2q_{35}^2 + 4q_{12}q_{15}^2q_{24}^2q_{45}^2 + 8q_{12}q_{15}^2q_{25}^2q_{34}^2 + 4q_{12}q_{15}^2q_{34}^4 \\
 & - 4q_{12}q_{15}^2q_{34}^2q_{35}^2 - 4q_{12}q_{15}^2q_{34}^2q_{45}^2 - 4q_{12}q_{24}^2q_{34}^2q_{35}^2 + 4q_{12}q_{24}^2q_{35}^4 \\
 & - 4q_{12}q_{24}^2q_{35}^2q_{45}^2 + 4q_{12}q_{25}^2q_{34}^4 - 4q_{12}q_{25}^2q_{34}^2q_{35}^2 - 4q_{12}q_{25}^2q_{34}^2q_{45}^2 \\
 & + 8q_{12}q_{34}^2q_{35}^2q_{45}^2 - 4q_{12}q_{13}^2q_{24}^2q_{35}^2)
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 e_7 = & -\frac{1}{q_{25}^2} + \frac{1}{5}\lambda q_{25} \\
 & + \sigma(-4q_{12}^2q_{13}^2q_{25}^2q_{34}^2 + 4q_{12}^2q_{13}^2q_{25}^2q_{35}^2 - 4q_{12}^2q_{13}^2q_{25}^2q_{45}^2 - 4q_{12}^2q_{14}^2q_{25}^2q_{34}^2 \\
 & - 4q_{12}^2q_{14}^2q_{25}^2q_{35}^2 + 4q_{12}^2q_{14}^2q_{25}^2q_{45}^2 + 8q_{12}^2q_{15}^2q_{25}^2q_{34}^2 + 4q_{12}^2q_{25}^2q_{34}^4 \\
 & - 4q_{12}^2q_{25}^2q_{34}^2q_{45}^2 + 4q_{13}^4q_{24}^2q_{25}^2 - 4q_{13}^4q_{25}^3 + 4q_{13}^4q_{25}^2q_{45}^2 - 4q_{13}^2q_{14}^2q_{23}^2q_{25}^2 \\
 & - 4q_{13}^2q_{14}^2q_{24}^2q_{25}^2 + 8q_{13}^2q_{14}^2q_{25}^3 + 8q_{13}^2q_{14}^2q_{25}^2q_{34}^2 - 4q_{13}^2q_{14}^2q_{25}^2q_{35}^2 \\
 & + 4q_{13}^2q_{23}^2q_{15}^2q_{25}^2 - 4q_{13}^2q_{23}^2q_{25}^2q_{45}^2 - 4q_{13}^2q_{15}^2q_{24}^2q_{25}^2 - 4q_{13}^2q_{15}^2q_{25}^2q_{34}^2 \\
 & - 4q_{13}^2q_{24}^2q_{25}^2q_{34}^2 - 4q_{13}^2q_{24}^2q_{25}^2q_{35}^2 + 8q_{13}^2q_{24}^2q_{25}^2q_{45}^2 + 8q_{13}^2q_{25}^3q_{34}^2 \\
 & - 4q_{13}^2q_{25}^2q_{34}^2q_{45}^2 + 4q_{14}^4q_{23}^2q_{25}^2 - 4q_{14}^4q_{25}^3 + q_{14}^4q_{25}^2q_{35}^2 - 4q_{14}^2q_{23}^2q_{15}^2q_{25}^2 \\
 & - 4q_{14}^2q_{23}^2q_{25}^2q_{34}^2 + 8q_{14}^2q_{23}^2q_{25}^2q_{35}^2 - 4q_{14}^2q_{23}^2q_{25}^2q_{45}^2 + 4q_{14}^2q_{15}^2q_{24}^2q_{25}^2 \\
 & - 4q_{14}^2q_{15}^2q_{25}^2q_{34}^2 - 4q_{14}^2q_{24}^2q_{25}^2q_{35}^2 + 8q_{14}^2q_{25}^3q_{34}^2 - 4q_{14}^2q_{25}^2q_{34}^2q_{35}^2 \\
 & - 4q_{23}^2q_{15}^2q_{25}^2q_{34}^2 + 4q_{23}^2q_{25}^2q_{34}^2q_{45}^2 - 4q_{15}^2q_{24}^2q_{25}^2q_{34}^2 + 4q_{15}^2q_{25}^2q_{34}^4 \\
 & + 4q_{24}^2q_{25}^2q_{34}^2q_{35}^2 - 4q_{25}^3q_{34}^4 - 4q_{12}^2q_{25}^2q_{34}^2q_{35}^2 - 4q_{13}^2q_{14}^2q_{25}^2q_{45}^2).
 \end{aligned}$$

Resolviendo e_1 y e_7 usando las relaciones de (7), obtenemos que

$$\lambda = -\left(\frac{5}{2}\right)\frac{-b^2 - ab + a^2}{b(b+a)a^3} \text{ y } \sigma = -\left(\frac{1}{8}\right)\frac{b^2 + a^2 + ab}{a^3b^7(b+a)},$$

donde $a = q_{12}$ y $b = q_{25}$. Sustituyendo estos valores en e_{11} y e_{12} de las ecuaciones (3), tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{5}a^2 + \frac{3}{5}b^2 - 1 &= 0, \\
 3b^8 - 8a^2b^6 &= 0.
 \end{aligned}$$

Las cuales tienen como solución

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ y } b = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Por lo tanto, existe una configuración central que cumple las condiciones del caso 2, el cual es un tetraedro regular donde cada cara es un triángulo equilátero y tiene una partícula en el centro de la pirámide, (véase la figura 2).

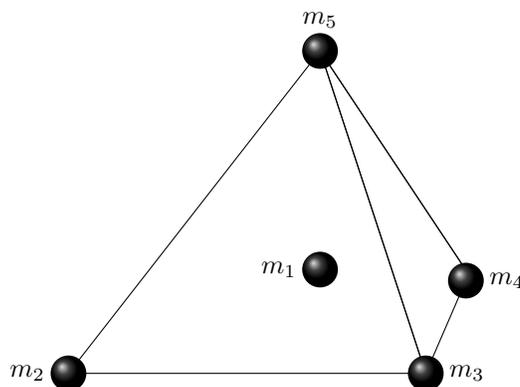


Figura 2. Configuración central de 5 cuerpos del caso 2.

3.3 Caso 3. $\Delta_1 = \Delta_2$ y $\Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5$.

De las condiciones iniciales $\Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5$, $\Delta_1 = \Delta_2$ y del sistema de ecuaciones (4), tenemos que las distancias relativas para este caso están relacionadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} q_{13} = q_{14} = q_{15} = q_{23} = q_{24} = q_{25}, \\ q_{34} = q_{35} = q_{45}. \end{aligned} \quad (9)$$

Aquí tenemos 3 distancias mutuas por encontrar. Sustituyendo las ecuaciones (9) en el sistema de ecuaciones (3), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} 4a^3 - 6a + 2ab^2 - b^3a^3 + 6b^3a - 2b^5a - 3b^3 + 4b - a^2b - 4ba^3 + ba^5 = 0 \\ -12a^2b^4 + 4a^2b^6 + 3a^4b^4 = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Aplicando recocido simulado al sistema (10) (el código que empleamos para este caso está representado por el apéndice A excepto para las funciones F, G y H las cuales en este caso sólo se usan dos funciones definidas por las ecuaciones (10)), obtenemos una única solución dada por

$$q_{13} = 1, \quad q_{12} = 1.428905139629991 \quad \text{y} \quad q_{34} = 1.211888021417097.$$

Por lo tanto existe una configuración central que cumple las condiciones del caso 3, el cual es un prisma de 6 caras, cada cara es un triángulo y su forma geométrica

está representada en la figura 3. Allí podemos apreciar claramente que un plano de simetría pasa por las partículas m_3 , m_4 y m_5 . Además, tiene un eje de simetría a través de las partículas m_1 y m_2 .

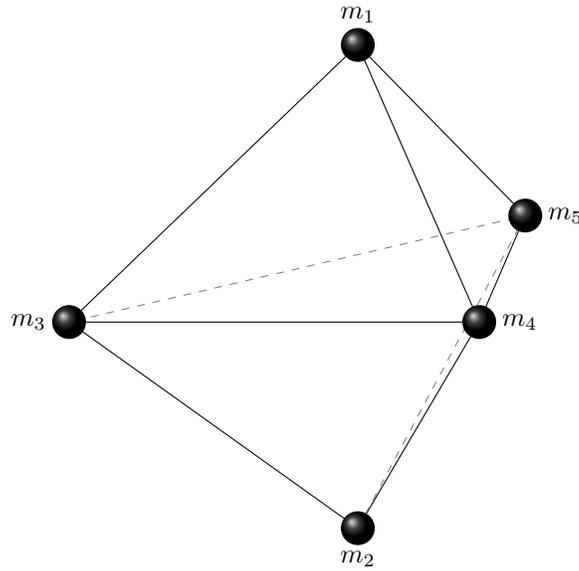


Figura 3. Configuración central de 5 cuerpos del caso 3.

3.4 Caso 4. $\Delta_1 \neq \Delta_2$ y $\Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5$.

De las condiciones iniciales $\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 \neq 0$, $\Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5$ y del sistema de ecuaciones (4), tenemos que las distancias relativas para este caso están relacionadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} q_{12} &= 1, & q_{13} &= q_{14} = q_{15} \\ q_{23} &= q_{24} = q_{25}, & q_{34} &= q_{35} = q_{45}. \end{aligned}$$

Definimos $a = q_{13}$, $b = q_{23}$ y $c = q_{34}$. Resolviendo e_1 y e_2 para λ y σ , obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda &= \left(\frac{5}{2}\right) \frac{-2c^2 + 3a^2 - 3 + 3b^2 - a^3 - b^2a^3 + a^5}{a^3(-c^2 + 2a^2 - 2 + b^2)} \text{ y} \\ \sigma &= -\frac{a^3 - 1}{8a^3c^4(b^2 + 2a^2 - c^2 - 2)}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en e_5 , e_8 y e_{12} , obtenemos el siguiente sistema polinomial,

$$\begin{aligned}
 -b^2a^3 - 2a^5 + a^3c^2 + 2a^3 + 2b^5 + b^3a^2 - b^3c^2 - 2b^3 - b^5a^3 + b^3a^5 &= 0, \\
 3a^4c^4 + 3c^4b^4 - 6a^2b^2c^4 - 6c^4b^2 - 6c^4a^2 + 4c^6 + 3c^4 &= 0, \\
 c^3 + c^3b^2a^3 - 2cb^2a^3 + ca^3b^4 - 2ca^5b^2 - 2a^3c^2 + a^3c & \\
 +3c^3a^3 - c^3a^5 - 2ca^5 + ca^7 + 2cb^2 + 2ca^2 - cb^4 - ca^4 - c + 4a^5 & \\
 -4a^3 + 2b^2a^3 - 3c^3b^2 + 2cb^2a^2 - 3c^3a^2 + 2c^5 &= 0.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Aplicando recocido simulado al sistema (11), (el código que empleamos para este caso está representado por el apéndice A excepto para las funciones F, G y H las cuales en este caso están definidas por las ecuaciones (11)), obtenemos 4 soluciones dadas por

<i>Soluciones</i>	q_{13}	q_{23}	q_{34}
1	0.699836519769916	0.699836519769916	0.848123495259391
2	1.632993161855453	1	1.632993161855453
3	1.135608671369086	1.872319390886508	1.661288262157793
4	1.872319390886508	1.135608671369086	1.661288262157793.

La solución uno corresponde al caso 3, la solución dos corresponde al caso 2 y los últimos dos casos son correspondientes al caso 4, el cual se asemeja a la pirámide del caso 2, pero en este caso la partícula que está en el interior de la pirámide está mas arriba que en el caso 2 pero se mantiene en el mismo eje de simetría, (véase la figura 4).

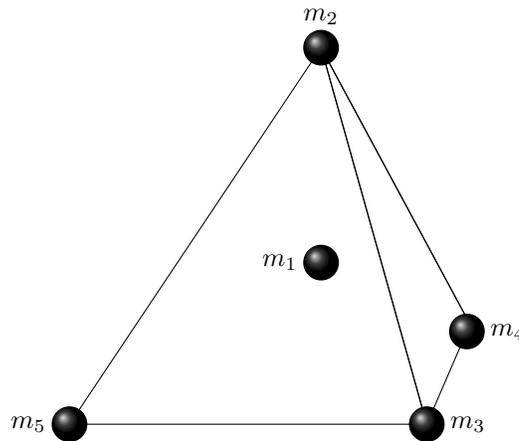


Figura 4. Configuración central de 5 cuerpos del caso 4.

3.5 Caso 5. $\Delta_1 \neq \Delta_2$ y $\Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5$.

De las condiciones iniciales $\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 = \Delta_4$, $\Delta_3 = \Delta_5$ y del sistema de ecuaciones (4), tenemos que las distancias relativas para este caso están relacionadas de la

siguiente manera:

$$q_{12} = q_{14}, \quad q_{13} = q_{15}, \quad q_{24}, \quad q_{35}, \quad q_{23} = q_{25} = q_{34} = q_{45} = 1.$$

Sustituyendo esto en el sistema de ecuaciones (3) obtenemos las ecuaciones definidas por las funciones F, G y H que aparecen en el apéndice A (el código para este caso esta representado en el apéndice B y aplicando recocido simulado obtenemos 3 soluciones.

q_{12}	q_{13}	q_{24}	q_{35}
1.211888021417097	1	1.211888021417097	1.428905139629991
1.138985516397694	1.138985516397694	1.414213562373095	1.414213562373095
0.612372435695794	0.612372435695794	1	1

Al sustituir los resultados en los volúmenes, observamos que la solución uno corresponde al caso 3, la solución 2 al caso 1 y la solución 3 al caso 2. De esta manera concluimos que para el caso 5 no hay configuración que cumpla estas condiciones.

4. Conclusión

Hemos probado que existen cuatro configuraciones centrales no coplanares en el problema de 5 cuerpos que son invariantes con respecto a una rotación. Es una conjetura que los casos con un solo plano de simetría y los que no son simétricos no son configuraciones centrales, por lo que nuestra lista de estudio en casos simétricos esta completa.

Apéndice

A. Código del recocido simulado para el caso 5

```

function [ UXYZ ] = cauchy( x,y,z )
k=1;
n=1;
step = 1/2^10;
ss=0;
function [F] = f( a,b,c )
F=12*b^3*a^7+8*b^5*a^3-4*b^7*a^3-12*b^3*a^2+12*b^5*a^2-3*b^5*c^2
-4*b^3*a^4+8*b^3*a^5-8*b^5*a^5+3*b^3*c^2-8*a^7+3*b^2*a^3*c^2
-8*b^3*a^5*c^2+5*b^3*a^2*c^2+b^3*a^3*c^4-4*b^3*a^3+4*a^3+4*a^5
-3*a^3*c^2-8*b^2*a^3-4*b^2*a^5+3*a^5*c^2+4*a^3*b^4-b^3*c^4;
end
function [G] = g( a,b,c )
G=-8*a^5+2*c^3*a^5+3*a^3*c^2+6*c^3*a^3+4*b^2*a^3-2*c^5*a^3
-6*c^3*b^2*a^3-4*a^3+6*c^3*a^2+2*c^3*b^2-2*c^3-c^5;
end
function [H] = h( a,b,c )
H=64*a^7+56*a^2*c^2*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2
-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))+24*b^2*c^2*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4
-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))-48*a^2*c^2*sqrt(-(4*a^2-c^2))*
(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*b^2+224*sqrt(-(4*a^2
-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^6
+64*a^5*c^2*b^2-28*a^5*c^4*b^2+3*a^3*c^6*b^2+4*a^3*b^4*c^4
-4*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4
+b^2*c^2))*c^4*a^4+32*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2
-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^3*b^8-32*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4
-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*b^6*a^2+4*sqrt(-(4*a^2-c^2))*
(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*b^4*c^4-4*sqrt(
-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*c^6*b^2
+8*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4
+b^2*c^2))*c^4*a^2-24*b^4*c^2*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4
-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))-32*a^5*c^2-3*a^3*c^6+64*a^7*b^4
-64*a^9*b^2+3*a^5*c^6+28*a^5*c^4+112*a^9*c^2-32*a^7*c^4
-80*a^7*c^2-64*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1
+b^4+b^2*c^2))*a^9-32*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2
-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*b^4*a^4+160*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4
-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*b^2*a^6-64*sqrt(-(4*a^2-c^2))*
(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^9*b^2-16*sqrt(
-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^9*c^2
+4*a^3*c^4-8*a^3*c^4*b^2+80*a^7*c^2*b^2-32*a^5*c^2*b^4+96*sqrt(
-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*b^4*a^2
+192*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4
+b^2*c^2))*b^2*a^4-128*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2
-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*b^6*a^3+192*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4
-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^3*b^4+4*sqrt(-(4*a^2-c^2))*
(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^3*c^4-128*sqrt(
-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^7*b^2
-64*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4
+b^2*c^2))*a^5-96*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2

```

```

+1+b^4+b^2*c^2))*a^8+64*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2
-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^7-128*a^7*b^2-96*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-
-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*b^2*a^2+64*sqrt(
-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*b^2*a^5
+16*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4
+b^2*c^2))*a^5*c^2+32*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2
-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^11+32*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2
-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^3-4*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2
+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*c^4-168*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-
-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*c^2*a^4*b^2-8*sqrt(
-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4
+b^2*c^2))*c^2*a^2*b^4+32*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4
-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^5*c^2*b^2-24*sqrt(-(4*a^2
-c^2)*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^5*c^4*b^2
+20*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4
+b^2*c^2))*a^3*b^4*c^4-24*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4
-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^3*c^4*b^2-160*sqrt(-(4*a^2
-c^2)*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^4+64*sqrt(
-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^7*b^4
-8*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4
+b^2*c^2))*a^5*c^4+4*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2
-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^7*c^4-88*a^4*c^2*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-
-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))+64*a^9-128*a^11
-8*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4
+b^2*c^2))*c^2-48*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2
+1+b^4+b^2*c^2))*a^5*c^2*b^4-112*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4
-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^3*c^2*b^4+48*sqrt(-(4*a^2
-c^2)*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*b^6*a^3*c^2
+4*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4
+b^2*c^2))*a^3*c^6*b^2+48*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4
-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*c^4*b^2*a^2+80*sqrt(-(4*a^2
-c^2)*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*b^2*a^3*c^2
+80*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4
+b^2*c^2))*a^7*c^2*b^2+16*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4
-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^7*c^2+64*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-
-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*b^4*a^5-64*sqrt(
-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^5*b^6
+32*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4
+b^2*c^2))*a^2+40*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2
+1+b^4+b^2*c^2))*c^2*a^6+8*sqrt(-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4
-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*b^6*c^2-16*sqrt(-(4*a^2-c^2))*(-
-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4+b^2*c^2))*a^3*c^2-128*sqrt(
-(4*a^2-c^2)*(-2*a^2+a^4-2*b^2*a^2-2*b^2+1+b^4
+b^2*c^2))*b^2*a^3;
end
function [w] = fU1(x,y,z)
    w = max([abs(x),abs(y),abs(z)]);
end
minU = 100000000;
minX = 0;

```

```
minY = 0;
minZ = 0;
uu = zeros(1000000,1);
T = 1000;
while T>0.0001
i=x + (unidrnd(3)-2)*step;
j=y + (unidrnd(3)-2)*step;
l=z + (unidrnd(3)-2)*step;
uj = fU1(f(i,j,l),g(i,j,l),h(i,j,l));
ui = fU1(f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z));
if uj < ui
    ss=ss+1;
    uu(ss)=fU1(f(i,j,l),g(i,j,l),h(i,j,l));
    x=i;
    y=j;
    z=l;
    if minU > uj
        minU = uj;
        minX = x;
        minY = y;
        minZ = z;
    end
else
    volado = unifrnd(0,1);
    p = exp((ui-uj)/T);
    if volado < p
        ss=ss+1;
        uu(ss)=fU1(f(i,j,l),g(i,j,l),h(i,j,l));
        x=i;
        y=j;
        z=l;
    end
end
end
T=10/(1+k);
n=n+1;
k=k+1;
end
UXYZ=[minU,minX,minY,minZ];
end
```

Referencias

- [A] A. Albouy, Recherches sur le problème des n corps, Notes scientifiques et techniques du Bureau des Longitudes, Paris, (1997) 78.
- [D] O. Dziobek, Über einen merkwürdigen Fall des Vielkörperproblems, *Astron. Nach.* 152 (1900) 33-46.
- [E] L. Euler, De motu rectilineo trium corporum se mutuo a trahentium, *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* 11 (1767) 144-151.
- [H] Y. HAGIHARA, *Celestial Mechanics*, vol. 1, chap. 3. The MIT Press, Cambridge, 1970.
- [HM] Hampton, M. y Moeckel, R., Finiteness of relative equilibria of the four-body problem. *Invent. Math.* 163 (2006), 289–312.
- [U] Uspensky, *Teoría de Ecuaciones*. Limusa.
- [W] A. Wintner, *The analytical foundations of celestial mechanics*. Princeton University Press, 1941.
- [Ya] Ya-lun Tsai, Dziobek configurations of the restricted $(N + 1)$ -body problem with equal masses. *J. Math. Phys.* **53**, 072902 (2012).