



## Fenómenos de enlace atómico en una dimensión

E. Rueda Solís

División Académica de Ingeniería y Arquitectura, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, C.P. 86690, Cunduacán, Tabasco, Mex.

[eruedas@gmail.com](mailto:eruedas@gmail.com)

Recibido: 19 diciembre 2014. Aceptado: 26 abril 2015. Publicado: 01 mayo 2015.

### Resumen

En este trabajo se resuelve la ecuación maestra que gobierna la dinámica de la interacción entre un campo electromagnético cuantizado y un átomo de dos niveles en el régimen dispersivo en una cavidad con pérdidas. Tales pérdidas se deben a la interacción del sistema con su medio ambiente. El problema se resuelve usando una técnica de superoperadores. Se muestra que es posible recobrar información del sistema aún para un número reducido de fotones en la cavidad. Se presentan colapsos y revivimientos que dependen del grado de disipación en la cavidad, lo que determina el nivel de interacción entre el átomo y el campo.

### I. Introducción

La Óptica Cuántica actualmente es una de las ramas de la física que en los últimos años ha tenido un acelerado desarrollo gracias al progreso de técnicas teórico-experimentales que permiten crear y detectar un fotón, así como estudiar un átomo dentro de una *cavidad*, por ejemplo [5]. Este trabajo está dedicado íntegramente al análisis de sistemas en cavidades, lo que recae en el centro de uno de los temas clásicos en Óptica Cuántica: La *electrodinámica cuántica de cavidades*, más conocida como CQED, por sus siglas en inglés. En este contexto se describe el mecanismo de interacción entre átomos y fotones en cavidades, y se trata de esclarecer los detalles del enredo entre estos subsistemas. La teoría acerca de un átomo acoplado a un campo de radiación de un sólo modo en una cavidad fue desarrollada con éxito por Jaynes y Cummings en 1963 [9], seguido de una serie de artículos relacionados a ello. La aparición de estos trabajos abrió camino hacia una ola de publicaciones acerca de sistemas en cavidades cuánticas [5]. Ahora bien, cuando consideramos una *cavidad ideal*, es decir, sin pérdidas de energía, los detalles de la interacción

tienden a esclarecerse (por ser un modelo ideal); pero cuando se considera una *cavidad real*, es decir, con disipación debido a la interacción del campo de la cavidad con el medio a través de las paredes (espejos), la descripción de la dinámica se complica. El problema de la dinámica entre un átomo de dos niveles interactuando con un campo cuantizado en el límite dispersivo en una *cavidad disipante* ha sido tratado exactamente por Peixoto-Nemes [3]. En este trabajo se definen *superoperadores* y se aplican estos a la solución de la *ecuación maestra* que describe tal problema, lo que conduce a una solución directa y analítica.

### II. Modelo de Jaynes-Cummings y la aproximación dispersiva

En esta sección se describe la interacción entre un campo de radiación monomodo cuantizado y un átomo de dos niveles con un sólo electrón, i.e, la interacción átomo-campo. Es obvio que sólo se tendrán dos estados atómicos:  $e$  el nivel excitado y  $g$  el nivel fundamental. Supondremos que el sistema átomo-campo se encuentra en una cavidad ideal.

La interacción del campo cuantizado con el átomo puede ser descrito por el siguiente hamiltoniano

$$\hat{H} = \hat{H}_F + \hat{H}_A + \hat{H}_{AF}, \quad (1)$$

donde  $\hat{H}_F$  y  $\hat{H}_A$  son las energías del campo y del átomo en estado libre, respectivamente; es decir, en ausencia de interacciones, mientras que  $\hat{H}_{AF}$  es el hamiltoniano que representa la interacción. Es bien sabido que la energía del campo cuantizado está dada por

$$\hat{H}_F = \hbar\omega_0 \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right), \quad (2)$$

siendo  $\omega_0$  la frecuencia de oscilación del modo del campo;  $a^+$  y  $a$  son los operadores de creación y aniquilación de fotones. El hamiltoniano del átomo libre está dado por

$$\hat{H}_A = \frac{1}{2} \hbar \omega_{eg} \hat{\sigma}_z, \quad (3)$$

donde  $\omega_{eg}$  es la frecuencia de transición atómica.

Se observa que la matriz de Pauli  $\hat{\sigma}_z$  nos define el hamiltoniano del átomo en estado libre. Finalmente, el hamiltoniano de la interacción está dado por

$$\hat{H}_{AF} = \hbar \Omega (a^+ \hat{\sigma}_- + a \hat{\sigma}_+). \quad (4)$$

El término  $a^+ \hat{\sigma}_-$  describe el proceso en el cual el átomo realiza la transición del estado excitado al estado base y se crea un fotón, en tanto que el término  $a \hat{\sigma}_+$  describe el proceso inverso. Por lo tanto, la energía es conservada en ambos procesos. El coeficiente  $\hbar \Omega$  es la constante de interacción, siendo  $\Omega$  la frecuencia de Rabi, que mide el acoplamiento entre el átomo y el campo. Entonces, el hamiltoniano completo de la ecuación (1) puede ser reescrito como

$$\hat{H} = \hbar \omega_0 a^+ a + \frac{1}{2} \hbar \omega_{eg} \hat{\sigma}_z + \hbar \Omega (a^+ \hat{\sigma}_- + a \hat{\sigma}_+), \quad (5)$$

lo que se conoce como el *Modelo de Jaynes-Cummings* (MJC) [9]. Las matrices de Spin de la ecuación (5) están dadas por

$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Ahora derivamos la condición de validez de la aproximación dispersiva para el caso no resonante en este modelo. Para esto, definimos la *desintonía* como  $\delta = \omega_{eg} - \omega_0$ , que mide el defasamiento entre los dos subsistemas. El límite dispersivo es alcanzado cuando  $\hat{H}_{AF}$  puede ser considerado como una perturbación pequeña en el sentido de que

$$\delta \gg \sqrt{\bar{n}} \Omega, \quad (7)$$

donde  $\bar{n}$  es el número promedio de fotones en el campo. Tenemos entonces un defasamiento grande, llamado "*límite dispersivo*", para el cual se obtiene un *hamiltoniano efectivo de interacción* [3], dado por

$$\hat{H}_I^{eff} = \chi a^+ a \hat{\sigma}_z, \quad (8)$$

donde  $\chi = \Omega^2 / \delta$  será la constante de interacción, en tanto que la matriz  $\hat{\sigma}_z$  está dada en la ecuación (6). En esta aproximación los estados tienden a *desacoplarse*, la intensidad del campo disminuye por lo que ya no logra provocar excitaciones en el átomo, y por consiguiente no hay intercambio de energía pero continúa habiendo dinámica en el sistema, es decir, hay oscilación dipolar en el átomo debido al campo.

### III. Modelo del problema

Ahora consideramos una "*cavidad no ideal*". En esta cavidad se tendrá un átomo de dos niveles interactuando con el único modo del campo cuántico, donde también será considerado el medio ambiente que envuelve a la cavidad. El campo monomodo es excitado por este medio, acción que genera las pérdidas de energía. En la práctica se trabaja con *átomos de Rubidio*.

En la descripción de interacción y en la aproximación dispersiva, la *ecuación maestra* que gobierna la dinámica de un átomo de dos niveles acoplado con un campo electromagnético cuantizado en una cavidad con disipación es

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_I^{eff}, \rho] + \hat{\mathcal{L}}\rho, \quad (9)$$

donde  $\rho = \rho(t)$  es la matriz de densidad del sistema y

$$\hat{\mathcal{L}}\rho = 2\gamma a \rho a^+ - \gamma a^+ a \rho - \gamma \rho a^+ a, \quad (10)$$

siendo  $\gamma$  la razón de decaimiento de la cavidad. El segundo término de la ecuación (9) es el *operador de las pérdidas* que describe la disipación y corresponde a un campo de vacío.

### IV. Solución. Técnica de superoperadores

Ahora nos enfocamos a la solución de la ecuación de movimiento del sistema dada por (9), donde el hamiltoniano está dado por (8). Para esto, definimos los *superoperadores* [1,7]

$$\hat{\mathcal{L}}\rho = -\hat{\Gamma} a^+ a \rho - \rho \hat{\Gamma}^+ a^+ a \quad (11)$$

y

$$\hat{\mathcal{J}}\rho = 2\gamma a \rho a^+, \quad (12)$$

donde  $\hat{\Gamma}^+$  es el adjunto de  $\hat{\Gamma}$ , dado este por

$$\hat{\Gamma} = \gamma \hat{I}_A + i\chi \hat{\sigma}_z, \quad (13)$$

con

$$\hat{I}_A = |e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|. \quad (14)$$

Es fácil mostrar que

$$[\hat{L}, \hat{J}] \hat{\rho} = \hat{S}_\Gamma \hat{J} \hat{\rho}, \quad (15)$$

donde el superoperador  $\hat{S}_\Gamma$  es definido como

$$\hat{S}_\Gamma \hat{\rho} = \hat{\Gamma} \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{\Gamma}^\dagger. \quad (16)$$

Se les denomina superoperadores debido a su acción sobre la matriz de densidad. Estos tienen la propiedad de actuar por la derecha y por la izquierda de esta matriz al mismo tiempo.

Al sustituir (8) en (9) con  $\hbar = 1$  y considerando (10), se obtiene fácilmente que

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = (\hat{L} + \hat{J}) \hat{\rho}. \quad (17)$$

Ahora suponemos que inicialmente el vector de estado del átomo está dado por el *estado puro*

$$|\psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle + |g\rangle), \quad (18)$$

y que el estado del campo es un *estado coherente*  $|\alpha\rangle$  [6]. Podemos entonces considerar que la función de onda inicial total del sistema está dada por la expresión

$$|\psi(0)\rangle = |\psi_A\rangle |\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle + |g\rangle) |\alpha\rangle. \quad (19)$$

La solución a la ecuación (17), sujeta a la condición inicial (19) es

$$\hat{\rho}(t) = e^{(\hat{L} + \hat{J})t} \hat{\rho}(0), \quad (20)$$

donde  $\hat{\rho}(0)$  es la matriz de densidad inicial, la cual describe un estado inicial puro o un estado inicial *mezclado* del sistema total.

Proponemos la siguiente factorización para (20)

$$\hat{\rho}(t) = e^{Lt} e^{\hat{J}(t)J} \hat{\rho}(0), \quad (21)$$

donde

$$\hat{f}(t) = \frac{1 - e^{-S_\Gamma t}}{S_\Gamma}. \quad (22)$$

Tenemos entonces completamente definida la matriz de densidad por (21).

Si consideramos el estado inicial dado por (19), la matriz de densidad inicial se escribe como

$$\hat{\rho}(0) = |\psi(0)\rangle\langle\psi(0)| = |\psi_A\rangle\langle\psi_A| \otimes |\alpha\rangle\langle\alpha|. \quad (23)$$

Ahora necesitamos operar esta matriz con el exponente de los superoperadores dado en (21). Así, al aplicar el exponencial  $e^{\hat{f}(t)J}$  sobre  $\hat{\rho}(0)$  en su forma de *serie de Maclaurin* tenemos

$$e^{\hat{J}J} \hat{\rho}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{f}^n |\psi_A\rangle\langle\psi_A| J^n |\alpha\rangle\langle\alpha|}{n!}, \quad (24)$$

esto debido a que  $\hat{f}$  es un superoperador atómico y operará sólo sobre estados atómicos, en tanto que  $J$  actuará sólo sobre estados de campo. Bajo un poco de álgebra se muestra que

$$\begin{aligned} \hat{f}^n |\psi_A\rangle\langle\psi_A| &= \left( \frac{1 - e^{-(\xi + \xi^*)t}}{(\xi + \xi^*)^n} \right)^n \hat{I}_A + \frac{(1 - e^{-2\xi^*t})^n}{(2\xi^*)^n} |e\rangle\langle g| \\ &+ \frac{(1 - e^{-2\xi t})^n}{(2\xi)^n} |g\rangle\langle e|, \end{aligned} \quad (25)$$

con  $\xi = \gamma + i\chi$  y  $r = 1/2$ . Es bien sabido que

$$J^n = (2\gamma)^n |\alpha\rangle\langle\alpha|. \quad (26)$$

Considerando (25) y (26) en (24), y sustituyendo esta última en (21), se obtiene finalmente la matriz de densidad total del sistema

$$\hat{\rho}(t) = \begin{pmatrix} e^{-\xi t} |\alpha\rangle\langle\alpha| e^{-\xi^* t} & e^{-\xi t} |\alpha\rangle\langle\alpha| e^{-\xi^* t} \\ e^{-\xi^* t} |\alpha\rangle\langle\alpha| e^{-\xi t} & e^{-\xi^* t} |\alpha\rangle\langle\alpha| e^{-\xi t} \end{pmatrix} \quad (27)$$

Esta matriz describe la evolución temporal del sistema y permite extraer información de la dinámica entre el átomo y el campo de la cavidad, como se verá en la siguiente sección.

## V. Resultados

Un primer e importante resultado ha sido la obtención de la matriz de densidad dada por la

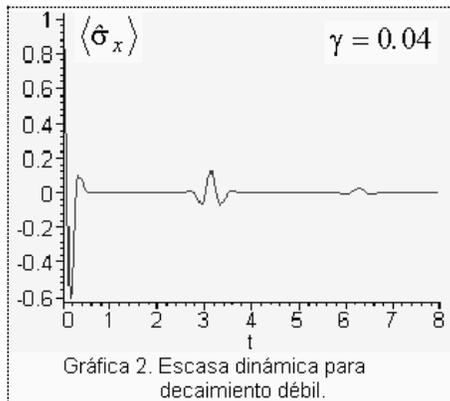
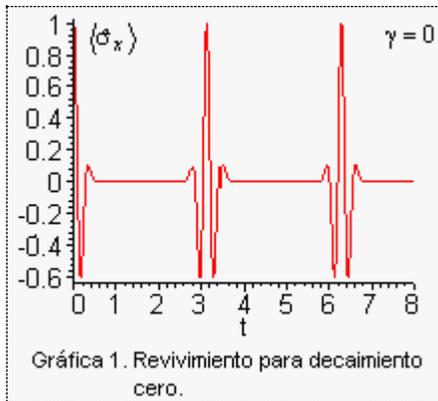
ecuación (27). Ahora calculamos el valor promedio de la observable  $\hat{\sigma}_x$ , es decir, el dipolo eléctrico ( $\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-$ ) mediante la ecuación

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = Tr[\hat{\rho}(t)\hat{\sigma}_x] = \sum_{m=0}^{\infty} \langle m|\hat{\rho}(t)\hat{\sigma}_x|m \rangle, \quad (28)$$

siendo  $\{|m\rangle\}$  una base arbitraria consistente de un conjunto completo de estados ortonormales. Al realizar este cálculo se obtiene la función sencilla

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = e^{-\phi|\alpha|^2} \cos\left\{\alpha^2 \left[ \gamma\beta - e^{-2\gamma t} \text{sen}(2\chi t) \right]\right\}, \quad (29)$$

donde las cantidades  $\phi$  y  $\beta$  aparecen definidas en [7]. Ahora graficamos esta función para diferentes grados de decaimientos. Sean  $\alpha = 3$  y  $\chi = 1$ , en tanto que  $t = [0,8]$ .



El promedio nos da la probabilidad de encontrar al átomo ya sea en el estado excitado o en el estado base, es decir, se mide la *polarización atómica*. En la gráfica 1 se observa que para decaimiento cero se tiene un “revivimiento”, por

lo que no se *pierde información*. En esta situación se tiene el máximo *acoplamiento*, lo que provoca *oscilación dipolar*, es decir, hay mayor dinámica.

En la gráfica 2 se observa que en presencia de pérdidas, comienza a haber poca respuesta por parte del ensemble ya que los estados del átomo y el campo tienden a *desacoplarse*, la interacción empieza a morir al disiparse la energía que es la causante de los revivimientos, la cual es absorbida por el medio. En este caso hay escasa oscilación dipolar en el átomo y la dinámica tiende al “*colapso*”, como es evidente. El flujo de energía depende de la constante de transmisión de los espejos. En la práctica se utilizan espejos de muy alta calidad.

## VI. Conclusiones

El problema se resolvió usando la técnica de superoperadores, lo que muestra que el método funciona adecuadamente. Se muestra además que es posible revivir las oscilaciones aún para un número reducido de fotones.

Se utilizó como laboratorio el MJC en el límite dispersivo en una cavidad disipativa por varias razones: porque es el modelo que describe la interacción, porque se puede obtener una solución analítica y porque es posible hacer pruebas experimentales de la actual predicción.

Finalmente, se concluye afirmando que las pérdidas afectan al sistema ya que se pierde información del campo y de su interacción con el átomo; pero también es importante saber de que manera esta afecta al sistema. Para trabajo inmediato se usará este método de solución para medir la función de onda de un campo electromagnético desconocido en la cavidad.

## VII. Agradecimientos

Agradezco enormemente al Conacyt el apoyo otorgado a través de la beca (No. 342187) para la realización de mis estudios de Maestría.

## VIII. Referencias

- [1] Moya-Cessa H., Roversi, J. A., Dutra S. M. And Barranco-Vidiella, Phys. Rev. A 60, 4029 (1999).
- [2] Louisell, W. H., “*Quantum Statistical properties of the Radiation*”, Wiley, New York, 1973.
- [3] Peixoto de Faria J. G. and Names M. C., Phys. Rev. A 59, 3918 (1999).
- [4] Carmichael H., “*An Open Systems Approach to Quantum Optics*”, Springer-Verlag, 1991.
- [5] Berman P. R., “*Cavity Quantum Electrodynamics*”, Academic Press, 1994.
- [6] Meystre P., “*Elements of Quantum Optics*”,

- Springer, Third Ed., 1998.
- [7] Ricárdez Vargas I., “*Solución de la interacción no resonante entre un campo cuantizado y un átomo de dos niveles en presencia de pérdidas*”, Tesis de Maestría, INAOE, México, 2002.
  - [8] Walls D. F. and Milburn G. J., “*Quantum Optics*”, Springer-Verlag, 1994.
  - [9] Jaynes E. T. and Cummings F. W., *Proc. IEEE*, **51**, 89 (1963).