Journal of Basic Sciences, Vol. 2 (5), pp. 41-54, mayo-agosto 2016

JOURNAL OF BASIC SCIENCES

Un Problema de Paro en Finanzas

Rubén Zavala Camargo[1,*], Heliodoro Daniel Cruz Suárez[1]

[1]*División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Carret. Cunduacán-Jalpa Km. 1, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tabasco, México*

**ruben.zavala.c@gmail.com*

Resumen

Se presenta un problema del precio justo de una opción Americana y el momento óptimo de ejercicio. Aquí, el problema es formulado como un Proceso de Decisión de Markov con criterio de recompensa descontada. El modelo binomial se usa para modelar el proceso del precio del activo financiero considerado en el problema. Se presenta un algoritmo para determinar el precio justo y el momento óptimo de ejercicio de una opción Americana.

Palabras claves*: Modelo binomial del mercado financiero, Opción Americana, Procesos de Decisión de Markov, Criterio de recompensa descontado, Iteración de valor.*

Abstract

Introducing a problem of the fair price of an American option and the optimal time of the exercise. Here, the problem is formulated as a Markov Decision Process with discounted reward criteria. The binomial model is used to model the process of financial asset price considered in the problem. An algorithm is presented to determine the fair price and the best time of exercise of the American option.

Keywords: Binomial model of financial market, American Option, Markov Decision Processes, Discounted reward criteria, Iteration value.

Recibido: 07 Febrero 2016. Aceptado: 27 Abril 2016. Publicado: 31 agosto 2016.

1. Introducción

Al realizar un nuevo proyecto se necesita de un activo financiero, el cual presenta cambios de precios considerables. Es supuesto que se tiene un techo financiero para el proyecto, hay gran interés en el comportamiento del precio del activo para la adquisición del mismo. Se asume que la inversión en el activo es de tal manera que no influye en los precios.

Se necesita cierta cantidad del activo financiero y sólo es posible pagar hasta cierto precio por él. Entonces, se debe observar el precio del activo y comprar en el mejor momento. Revisando la literatura, es viable obtener una opción de compra Americana para el activo financiero. Ahora, el problema es determinar el precio justo de la opción Americana y el tiempo óptimo de ejercicio. Una manera de hacerlo se encuentra en [1].

Aquí se presenta un algoritmo para determinar el precio justo y el momento óptimo de ejercicio de la opción Americana.

El trabajo está organizado de la siguiente manera. En la sección 2 se introduce un resumen de la teoría de los Procesos de Decisión de Markov, los cuales son utilizados en el trabajo. En la sección 3 se define el Mercado Financiero para el activo, esto es, se da un modelo para analizar la evolución del precio del activo. En la sección 4 se da un resumen de la teoría del problema de paro con horizonte finito. En la sección 5 se formula el problema del precio de una opción Americana como un Problema de Decisión de Markov y, finalmente, en la sección 6 se da solución al problema del precio justo y el tiempo óptimo de ejercicio de una opción Americana.

2. Procesos de Decisión de Markov de Horizonte Finito

Este modelo se debe a que en el problema se tiene una fecha establecida para la realización del proyecto. Aquí se da la estructura del modelo.

2.1 Modelos de Decisión de Markov

Un *Modelo de Decisión de Markov* estacionario con horizonte de planeación $N \in \mathbb{N}$ consiste en un conjunto de datos (E, A, D, Q, r, r_N) con el siguiente significado (ver [2]):

- E es el *espacio de estados*, con una σ-álgebra $\mathcal{E}$. Los elementos (estados) son denotados por $x \in E$.
- A es el *espacio de acciones*, con una σ-álgebra $\mathcal{A}$. Los elementos (acciones) son denotados por $a \in A$.
- $D \subset E \times A$ es un subconjunto medible de $E \times A$ y denota el conjunto de combinaciones posibles de estado-acción. Suponer que D contiene la gráfica de una función medible $f: E \to A$, es decir, $(x, f(x)) \in D$ para todo $x \in E$. Para $x \in E$, el conjunto

$$D(x) = \{a \in A \,|(x, a) \in D\} \tag{1}$$

  es el conjunto de *acciones admisibles* (o *permitidas*) en el estado x.
- Q es un kernel de transición estocástico de D a E, es decir, para cualquier par fijo $(x, a) \in D$, la función $B \mapsto Q(B|x, a)$ es una medida de probabilidad sobre $\mathcal{E}$ y $(x, a) \mapsto Q(B|x, a)$ es una función medible para todo $B \in \mathcal{B}$. Q describe la *ley de transición*.
- $r: D \to \mathbb{R}$ es una función medible. $r(x, a)$ proporciona la *recompensa de una etapa* del sistema.
- $r_N: D \to \mathbb{R}$ es una función medible. $r_N(x)$ proporciona una *recompensa* terminal del sistema en el tiempo N si el estado es x.

Una función medible $f: E \to A$, con la propiedad $f(x) \in D(x)$ para todo $x \in E$, se llamará una *regla de decisión*. Se denota por F al conjunto de todas las reglas de decisión.

Una sucesión de reglas de decisión $\pi = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$ con $f_n \in F$ para $n = 0,1, \ldots, N-1$, se llamará una *política de* N *etapas* o *estrategia de* N *etapas*. Se denota por F^N al conjunto de todas las políticas $\pi = (f_0, \ldots, f_{N-1})$ de N etapas.

Un modelo de decisión de Markov es un experimento aleatorio de N etapas. Para establecer matemáticamente este experimento se debe definir el espacio de probabilidad. La *construcción canónica* es como sigue. Definir un espacio medible $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ por

$$\Omega = E^{\{N+1\}}, \qquad \mathcal{F} = \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}.$$

Denotar por $\omega = (x_0, x_1, \ldots, x_N) \in \Omega$. Las variables aleatorias $X_0, X_1, \ldots, X_N$ se definen sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ por

$$X_n(\omega) = X_n((x_0, x_1, \ldots, x_N)) = x_n,$$

siendo la n-ésima proyección de ω. La variable aleatoria X_n representa el estado del sistema en el tiempo n y (X_n) se llamará *Proceso de Decisión de Markov*. Suponer ahora que $\pi = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$ es una política fija y que $x \in E$ es un estado inicial fijo. Por el teorema de Ionescu-Tulcea existe una medida de probabilidad única $\mathbb{P}_x^\pi$ sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ con

(i) $\mathbb{P}_x^\pi(X_0 \in B) = \delta_x(B)$, para todo $B \in \mathcal{E}$.
(ii) $\mathbb{P}_x^\pi(X_0 \in B) = \delta_x(X_{n+1} \in B|X_1, \dots, X_n) = \mathbb{P}_x^\pi(X_{n+1} \in B|X_n) = Q_n(B|X_n, f_n(X_n))$.

La ecuación (ii) es la llamada *Propiedad de Markov*, es decir, la sucesión de las variables aleatorias $X_0, X_1, \dots, X_n$ es un proceso de Markov no estacionario con respecto a $\mathbb{P}_x^\pi$. Por $\mathbb{E}_x^\pi$ denotar la esperanza con respecto a $\mathbb{P}_x^\pi$. Además, denotar por $\mathbb{P}_{nx}^\pi$ la probabilidad condicional $\mathbb{P}_{nx}^\pi(\cdot) := \mathbb{P}^\pi(\cdot|X_n = x)$. $\mathbb{E}_{nx}^\pi$ es el correspondiente operador esperanza.

2.2 Modelos de Decisión de Markov de Horizonte Finito

Para garantizar que todas las esperanzas que aparecen están bien definidas se hace la siguiente suposición:

Suposición (S_N). Para $x \in E$,

$$\delta_N(x) := \sup_\pi \mathbb{E}_x^\pi[\textstyle\sum_k^N \beta^k r^+(X_k, f_k(X_k)) + \beta^k r_N^+(X_N)] < \infty, \tag{2}$$

donde $x^+ = \max\{0, x\}$ denota la parte positiva de x.

Vamos a introducir la recompensa descontada esperada de una política y el problema de optimización de N etapas. La recompensa descontada esperada durante n etapas, bajo una política $\pi \in F^n$, está dada por

$$J_{n\pi}(x) := \mathbb{E}_x^\pi[\textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \beta^k r(X_k, f_k(X_k)) + \beta^n r_N(X_n)], \qquad x \in E \tag{3}$$

cuando el sistema inicia en el estado $x \in E$, para un factor de descuento $\beta \in (0,1]$. Si i es la tasa de interés en el mercado, entonces el factor de descuento y la tasa de interés tienen la siguiente relación

$$\beta = \frac{1}{1+i}. \tag{4}$$

(ver [2]).

La recompensa esperada descontada máxima durante n etapas está definida por

$$J_0(x) := r_N(x)$$

$$J_n(x) := \sup_{\pi \in F^n} J_{n\pi}(x), \; x \in E, 1 \leq n \leq N. \tag{5}$$

J_n es la *función de valor*.

Una política $\pi \in F^{N-1}$ se llamará *óptima* para el modelo de decisión de Markov estacionario de N etapas si

$$J_{N\pi}(x) = J_N(x), \tag{6}$$

para todo $x \in E$.

2.3 La Ecuación de Bellman

Se denotará por

$$\mathrm{M(E)} := \{\mathrm{v}: \mathrm{E} \to [-\infty, \infty) \mid \mathrm{v} \quad \text{es medible}\}. \tag{7}$$

Por las suposiciones se tiene que $\mathrm{J}_{\mathrm{n}\pi} \in \mathrm{M(E)}$ para todo π y n.

Se definen los siguientes operadores:

a) Para $\mathrm{v} \in \mathrm{M(E)}$ definimos

$$Lv(x,a) \coloneqq r(x,a) + \int v(x')Q(dx'|x,a) \qquad (x,a) \in D, \tag{8}$$

cuando la integral existe.

b) Para $v \in \mathrm{M(E)}$ definir

$$\mathcal{T}_f v(x) \coloneqq (Lv)\big(x, f(x)\big), \quad x \in E. \tag{9}$$

c) Para $\mathrm{v} \in \mathrm{M(E)}$ definir

$$\mathcal{T}v(x) \coloneqq \sup_{a \in D(x)} Lv(x,a), \quad x \in E. \tag{10}$$

$\mathcal{T}$ se llamará el operador de recompensa máxima.

Iteración de Recompensas. Para $\pi = (f_0, \dots, f_{n-1})$ se cumple:

$$J_{n\pi} = \mathcal{T}_{f_0} \cdots \mathcal{T}_{n-1} r_N. \tag{11}$$

Sea $\mathrm{v} \in \mathrm{M(E)}$. Una regla de decisión $f \in F$ se llamará un *maximizado* de v si $\mathcal{T}_f v = \mathcal{T}v$, es decir, para todo $x \in E$, $f(x)$ es un punto máximo de la función $a \mapsto Lv(x,a)$, $a \in D(x)$.

La suposición de estructura para los Modelos de Decisión de Markov Estacionarios.

Suposiciones de Estructura $\mathrm{SE_N}$. Existen conjuntos $M \subset M(E)$ y $\Delta \subset F$ tales que:
(i) $r_N \in M(E)$.
(ii) Si $v \in M$ entonces $\mathcal{T}v$ está bien definido y $\mathcal{T}v \in M$.
(iii) Para toda $v \in M$ existe un maximizador $f \in \Delta$ de v, es decir,

$$\mathcal{T}_f v(x) = \mathcal{T}v(x), \quad x \in E. \tag{12}$$

Suponer que (SE_N) se satisface.
a) Entonces $J_n \in M$ y la ecuación de Bellman $J_n = \mathcal{T}J_{n-1}$ se cumple, es decir,

$$J_0(x) = r_N(x), \tag{13}$$

$$J_n(x) = \sup_{a \in D(x)} \{r(x,a) + \beta \int J_{n-1}(x')Q(dx'|x,a)\}, x \in E. \tag{14}$$

Además, $J_n = \mathcal{T}^n r_N$.
b) Para $n = 1, \dots, N$ existen maximizadores f_n^* de J_{n-1} con $f_n^* \in \Delta$ y cada sucesión de maximizadores f_n^* de J_{n-1} define una política óptima $(f_N^*, \dots, f_1^*)$ para el problema de decisión de Markov Estacionario de N etapas.

Algoritmo de Inducción hacia adelante.
1. Sea $n \coloneqq 0$ y para $x \in E$:

$$J_0(x) = r_N(x). \tag{15}$$

2. Sea $n := n + 1$ y para todo $x \in E$:

$$J_n(x) = \sup_{a \in D(x)} \{r(x, a) + \beta \int J_{n-1}(x') Q(dx'|x, a)\}. \tag{16}$$

Calcular un maximizador f_n^* de J_{n-1}.

3. Si $n = N$, entonces la función de valor J_N es calculada y la política óptima π^* está dada por $\pi^* = (f_N^*, \dots, f_1^*)$. En otro caso, ir al paso 2.

El *algoritmo de inducción* calcula las funciones de valor de la etapa n y las reglas de decisión recursivamente sobre las etapas, iniciando con la función de recompensa terminal.

3. Mercado Financiero

Se presenta un mercado financiero a tiempo discreto. Un prominente ejemplo es el modelo binomial. Sin embargo, no se restringe en general a espacios de probabilidad finita. Se definen estrategias de portafolios y se caracteriza la ausencia de arbitraje en estos mercados.

3.1 Dinámica de activos y estrategias de portafolios

La forma más común del precio de un activo es un modelo multiplicativo, es decir, si S_n es el precio al tiempo $t_n > 0$ entonces

$$S_{n+1} = S_n \tilde{R}_{n+1}. \tag{17}$$

La variable aleatoria positiva $\tilde{R}_{n+1}$ define el cambio de precio relativo entre S_{n+1}/S_n el tiempo t_n y t_{n+1}. Para un bono sin riesgo el cambio de precio relativo S_{n+1}^0/S_n^0 es elegido como $1 + i_{n+1}$ con la tasa de interés $i_{n+1} \in \mathbb{R}_+$.

***El modelo binomial* o *modelo de Cox-Ross-Rubinstein*.** Se supone que existe un bono con $i_{n+1} \equiv i$ y una acción con cambio de precio relativo, los cuales son independientes e idénticamente distribuidos y pueden tomar dos valores: ya sea $\mathbf{u} > 0$ para subir o $\mathbf{d} > 0$ para bajar, donde se supone que $\mathbf{d} < \mathbf{u}$.

Las probabilidades para subir y para bajar son p y $1 - p$ respectivamente, es decir,

$$\mathbb{P}(\tilde{R}_n = \mathbf{u}) = p, \qquad \mathbb{P}(\tilde{R}_n = \mathbf{d}) = 1 - p. \tag{18}$$

El mercado financiero está dado por

- Un bono sin riesgo con $S_0^0 \equiv 1$ y

$$S_{n+1}^0 := S_n^0(1 + i_{n+1}), \quad n = 0,1,\dots,N-1, \tag{19}$$

  donde i_{n+1} es la tasa de interés determinística para el periodo de tiempo $[n, n+1)$. Si la tasa de interés es constante, es decir, $i_n \equiv i$, entonces $S_n^0 = (1 + i)^n$.

- Existen d activos con riesgo y el proceso del precio del activo k está dada por $S_0^k = s_0^k$ y

$$S_{n+1}^k = S_n^k \tilde{R}_{n+1}^k, \qquad n = 0,1,\dots,N-1. \tag{20}$$

Los procesos (S_n^k) se asumen adaptados con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_n)$ para todo k. Además, se supone que $\tilde{R}_{n+1}^k > 0\ c.s.$ para todo k y n, y que $s_0 k$ es determinístico. $\tilde{R}_{n+1}^k$ es el cambio de precio relativo en el intervalo de tiempo $[n, n+1)$ para el activo k.

En lo que sigue, se denota por $S_n \coloneqq (S_n^1, \dots, S_n^d), \tilde{R} \coloneqq \left(\tilde{R}_n^1, \dots, \tilde{R}_n^d\right)$ y $\mathcal{F}_n^S \coloneqq \sigma(S_0, \dots, S_n)$. Puesto que (S_n) es $(\mathcal{F}_n)$-adaptado se cumple: $\mathcal{F}_n^S \subset \mathcal{F}_n$ para $n = 0,1, \dots, N$.

Se define una *estrategia portafolio* o *inversión* como un proceso estocástico $\phi = (\phi_n^0, \phi_n)$ $\mathcal{F}_n$-adaptado, donde $\phi_n^0 \in \mathbb{R}$ y $\phi_n = \left(\phi_n^1, \dots, \phi_n^d\right) \in \mathbb{R}^d$ para $n = 0,1, \dots, N-1$. La cantidad ϕ_n^k denota el monto de dinero invertido en el activo k durante el intervalo de tiempo $[n, n+1)$.

El vector (ϕ_0^0, ϕ_0) es llamado el *portafolio inicial* del inversionista. El valor del portafolio inicial está dado por:

$$X_0 \coloneqq \sum_{k=0}^{d} \phi_0^k = \phi_0^0 + \phi_0 \,, \tag{21}$$

donde $x \cdot y = \sum_k^d x_k y_k$ denota el producto interno de los vectores $x, y \in \mathbb{R}^d$ y $e := (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^d$.

Sea ϕ una estrategia de portafolio. Denotar por X_n el valor del portafolio al tiempo n antes de invertir. Entonces

$$X_n := \sum_{k=0}^{d} \phi_{n-1}^k \tilde{R}_n^k = \phi_{n-1}^0 (1 + i_n) + \phi_{n-1} \cdot \tilde{R}_n. \tag{22}$$

El valor del portafolio al tiempo n después de invertir está dado por

$$X_{n+} := \sum_{k=0}^{d} \phi_n^k = \phi_n^0 (1 + i_n) + \phi_n \cdot e. \tag{23}$$

Escribir X_n^ϕ cuando se quiera tomar la dependencia en la estrategia de portafolio ϕ explicitamente.

Una estrategia de portafolio ϕ es llamada *autofinanciada* si

$$X_n := X_{n+}\,, \tag{24}$$

para todo $n = 1, \dots, N-1$, es decir, la riqueza presente es reasignada a los activos.

Una *oportunidad de arbitraje* es una estrategia de portafolio autofinanciada $\phi = (\phi_n^0, \phi_n)$ con la propiedad: $X_0^\phi = 0$ y

$$\mathbb{P}\left(X_N^\phi \geq 0\right) = 1, \quad \text{y} \quad \mathbb{P}\left(X_N^\phi > 0\right) > 0. \tag{25}$$

En el mercado financiero binomial, una condición necesaria y suficiente para la falta de oportunidades de arbitraje es que los parámetros del modelo satisfagan

$$\mathbf{d} < 1 + i < \mathbf{u}. \tag{26}$$

Una función $U: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es llamada *función de utilidad* si U es estrictamente creciente, estrictamente cóncava y continua en $\mathbb{R}$.

4. Teoría de Problemas de Paro Óptimo

Una subclase muy importante de los Problemas de Decisión de Markov que se consideran son los problemas de paro óptimo. Dado un Proceso de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, el cual no puede ser influenciado por el decisor, el proceso tiene que ser parado en algún punto del tiempo n y entonces se obtiene una recompensa $r(X_n)$. Así, la sola decisión en cada punto del tiempo es si el proceso debe continuar o parar. Una vez parado el proceso, no es necesaria una decisión adicional. Algunas veces se paga un costo o se obtiene una recompensa adicional, siempre que el proceso no sea parado. Por supuesto, el fin es encontrar un tiempo de paro tal que la recompensa de paro esperada sea maximizada.

4.1 Problemas de paro con horizonte finito

Se considera un problema de paro de horizonte finito N. Notar que siempre se tiene que parar, es decir, si no se para antes del tiempo N se debe parar al tiempo N. Asumir que el proceso de estados está dado por un proceso de Markov (X_n) (estacionario) sobre un espacio de estados general E con una σ –álgebra $\mathcal{E}$ con kernel de transición Q^X. Todo el tiempo que el proceso no es parado, una recompensa medible $\beta^n c(X_n)$ se obtiene. Si el proceso es parado al tiempo n la recompensa de paro es $\beta^n r(X_n)$. También, se asume que la decisión sólo puede depender de la observación del proceso (X_n). Así, denotar por $\mathcal{F}_n$ la filtración generada por el proceso (X_n), es decir, $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, \dots, X_n)$.

Un tiempo aleatorio $\tau: \Omega \longrightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ es un $\mathcal{F}_n$-tiempo de paro si para toda $n \in \mathbb{N}_0$

$$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Esta condición significa que se requiere observar el proceso (X_n) hasta el tiempo n, para poder decidir si τ ya ocurrió o no. En tiempo discreto la condición es equivalente a $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$, para toda $n \in \mathbb{N}_0$. En las aplicaciones, considerar la filtración generada por (X_n). Así, si se elige un tiempo de paro τ con $\mathbb{P}_x(\tau \leq N) = 1$, para todo $x \in E$, se obtiene la recompensa

$$R_\tau := \sum_{k=0}^{\tau-1} \beta^k c(X_k) + \beta^\tau r(X_\tau). \tag{27}$$

Con el fin de obtener un problema bien definido, se necesita la siguiente suposición general:

Suposición (B_N): Para $x \in E$

$$\sup_{n\leq\tau\leq N} \mathbb{E}_{nx}\left[\sum_{k=n}^{\tau-1} \beta^k c^+(X_k) + \beta^\tau r^+(X_\tau)\right] < \infty, 0 \leq n \leq N. \tag{28}$$

Luego, el problema es hallar el valor

$$J_N^*(x) := \sup_{\tau\leq N} \mathbb{E}_x[R_\tau]. \tag{29}$$

donde el supremo es tomado sobre todos los tiempos de paro τ con $\mathbb{P}_x(\tau \leq N) = 1$, para todo $x \in E$. Un tiempo de paro $\tau^* \leq N$ es *óptimo* si para todo $x \in E$

$$J_N^*(x) := \mathbb{E}_x[R_{\tau^*}]. \tag{30}$$

Con el fin de establecer la conexión al problema de paro en la Ec. (29), la siguiente relación entre tiempos de paro y políticas en el Modelo de Decisión de Markov es crucial:

Suponer que $\pi = (f_0, \dots, f_{N-1})$ es una política arbitraria para el Modelo de Decisión de Markov y definir

$$\tau_\pi := \inf\{\, n \in \mathbb{N}_0 | \, f_n(X_n) = 1\} \wedge N. \tag{31}$$

El tiempo aleatorio τ_π es un $\mathcal{F}_n$-tiempo de paro porque

$$\{\tau_\pi = n\} = \{f_0(X_0) = 0, \ldots, f_{n-1}(X_{n-1})0, f_n(X_n) = 1\} \in \mathcal{F}_n. \quad (32)$$

Por construcción, está acotado por N. τ_π es llamado un *tiempo de paro de Markov* puesto que $\pi = (f_n)$ es Markoviana.

De otra manera, suponer que τ es un $\mathcal{F}_n$-tiempo de paro. Entonces, por definición, existe una función medible $f_n: E^{n+1} \to \{0,1\}$, para toda $n \in \mathbb{N}_0$, tal que

$$1_{[\tau=n]} = f_n(X_0, X_1, \ldots, X_n). \quad (33)$$

Así, τ se puede representar por una política dependiente de la historia $\pi = (f_0, \ldots, f_{N-1})$. En particular se cumple que

$$\mathrm{J}_{0\pi}(\mathrm{x}) = \mathbb{E}_x\left[\sum_{k=0}^{\tau_\pi - 1} \beta^k c(X_k) + \beta^{\tau_\pi} r_{\tau_\pi}(X_{\tau_\pi})\right] = \sum_x\left[R_{\tau_\pi}\right] = \mathbb{E}_x[R_\tau]. \quad (34)$$

Así, el problema a resolver es

$$J_N(x) \coloneqq \sup_{\tau \le N}\left[\sum_{k=0}^{\tau-1} \beta^k c(X_k) + \beta^\tau r_\tau(X_\tau)\right], \ x \in E. \quad (35)$$

donde el supremo es tomado sobre todos los tiempos de paro τ, los cuales satisfacen $\mathbb{P}_x(\tau \le N)$ =1 para todo $x \in E$.

Suponer que está dado un problema de paro estacionario con horizonte finito N. Entonces se cumple:

$a)$ $J_0 = r$ y $J_n = \mathcal{T} J_{n-1}$, para $\mathrm{n} = 1, \ldots, \mathrm{N}$ donde

$$\mathcal{T}v(x) = \max\{r(x), c(x) + \beta \int v(x') Q^X(dx'|x)\}, x \in E. \quad (36)$$

b) $r \le J_n \le J_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}_0$.

c) Definir $\mathrm{d}_n(\mathrm{x}) := \mathrm{r}(\mathrm{x}) - \mathrm{c}(\mathrm{x}) - \beta \int \mathrm{J}_{n-1}(\mathrm{x}') \mathrm{Q}^X(\mathrm{dx}'|\mathrm{x})$, para $n = 1, \ldots, N$. Entonces tenemos la siguiente recursión

$$d_{n+1}(x) = d_1(x) - \beta \int d_n^-(x') Q^X(dx'|x). \quad (37)$$

d) Considerar $S_n^* \coloneqq \{ x \in E \mid J_n(x) = r(x)\}$ y definir $\mathrm{f}_n^*(\mathrm{x}) := 1_{S_n^*}$. Entonces $\mathrm{S}_0^* = \mathrm{E}$, $\mathrm{S}_n^* = \{ \mathrm{x} \in \mathrm{E} \mid \mathrm{d}_n(\mathrm{x}) \ge 0\}$ y $\mathrm{S}_{n+1}^* \subset \mathrm{S}_n^*$. La política $(\mathrm{f}_N^*, \ldots, \mathrm{f}_1^*)$ es óptima y

$$\tau^* := \min\{ n \in \{0,1, \ldots, \mathrm{N}\} \mid \mathrm{X}_n \in \mathrm{S}_{N-n}^*\}, \quad (38)$$

es un tiempo de paro óptimo.

5. Precio de Opciones Americanas

Con el propósito de encontrar el precio justo de una opción Americana y su tiempo óptimo de ejercicio, tenemos que resolver el problema de paro óptimo de horizonte finito N. En contraste a una opción Europea, el comprador de una opción Americana puede elegir cualquier tiempo, incluyendo el tiempo de expiración N, para ejercer la opción. Se considera el *modelo binomial* como un mercado financiero subyacente con la suposición **d** < 1+ i < **u** lo cual implica la no oportunidad de arbitraje y la existencia de una única medida $\mathbb{Q}$. Esta medida es usada para precios y también es llamada medida de probabilidad neutral al riesgo. Bajo $\mathbb{Q}$, la probabilidad de un movimiento de la acción está dada por

$$q = \frac{1+i-\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{d}}. \tag{39}$$

Se consideran opciones Americanas generales con fecha de expiración finita y se concentra en el caso de opciones con trayectorias independientes.

5.1 Opciones Americanas

El análisis se concentra en trayectorias independientes de opciones Americanas, es decir, el proceso (X_n) que tiene que ser parado está dado por el proceso del precio de la acción $(X_n) = S_n$. Una trayectoria independiente de una opción americana da el pago $h(S_n)$ si es ejercida en el tiempo n, es decir, la función de pago depende sólo del precio actual de la acción y no de su trayectoria. La fecha de expiración se supone que es N. Sin embargo, la opción puede ser no ejercida, en dicho caso el pago es cero. Así, es fácil ver que no es óptimo ejercer cuando $h(S_n) < 0$ y se puede elegir de manera equivalente $h^+(S_n)$ como pago. Denotar $\beta := (1+\mathrm{i})^{-1}$. El tiempo de esta opción al tiempo cero es entonces calculado como

$$\sup_{\tau \leq N} \mathbb{E}_x^{\mathbb{Q}} [\, \beta^\tau \mathrm{h}^+(\mathrm{S}_\tau)],$$

donde el supremo es tomado sobre todos los tiempos de paro τ con $\mathbb{P}(\tau \leq N) = 1$. $S\_0 = \mathrm{x}$ es el precio de la acción al tiempo cero y la esperanza es tomada respecto a la medida neutral al riesgo $\mathbb{Q}$. Este problema de paro puede ser formulado como un Problema de Decisión de Markov. Los datos del problema de paro son:

- E := $\mathbb{R}_+$, donde x representa el precio actual de la acción,
- $\mathrm{A} := \{0,1\}$,donde $a = 0$ significa continuar y $a = 1$ significa ejercer,
- $\mathrm{Q}^X(\mathrm{B}|\mathrm{x}) = \mathrm{q}\delta_{x\boldsymbol{u}}(\mathrm{B}) + (1-\mathrm{q})\delta_{x\boldsymbol{d}}(\mathrm{B})$, $x \in E$ para conjuntos de Borel B donde q está dado por Ec. (39),
- $\mathrm{r}(\mathrm{x}) := \mathrm{h}^+(\mathrm{x})$ y $\mathrm{c}(\mathrm{x}) \equiv 0$,
- $\beta := (1+\mathrm{i})^{-1} \in (0,1]$ es el factor de descuento.

Notar que cuando S_0 es el precio inicial de la acción, entonces al tiempo n en el modelo binomial los únicos precios de la acción están dados por

$$\{S_0 u^k d^{n-k} \mid k = 0, \dots, n\}.$$

La suposición (B_N) se satisface ya que

$$\sup_{n \leq \tau \leq N} \mathbb{E}_{nx}^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{k=n}^{\tau-1} \beta^k c^+(X_k) + \beta^\tau h^+(X_\tau)\right] \leq \mathbb{E}_{nx}^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{k=n}^{N} h^+(X_\tau)\right] < \infty$$

porque $X_k$sólo puede tomar un número finito de valores posibles con probabilidad positiva para todo $\mathrm{k} = 1, \dots, \mathrm{N}$. Además, la siguiente iteración de valor se cumple para este problema.

Algoritmo de Precios para Opciones Americanas.

Suponer que la función de pago está dada por h.
1. Considerar $n := 0$ y definir para $x \in \{S_0 d^k u^{N-k} | 0 \leq k \leq N\}$:

$$J_0(x) := h^+(x). \tag{40}$$

Considerar $\mathrm{f}_0^*(\mathrm{x}) := 1$ si $h(x) > 0$ y $\mathrm{f}_0^*(\mathrm{x}) := 0$ si $h(x) \leq 0$.

2. Considerar $\mathrm{n}+1$ y definir para $x \in \{S_0 d^k u^{N-n-k} | 0 \leq k \leq N-n\}$:

$$J_n(x) := \max\{h^+(x), \beta\big(qJ_{n-1}(xu) + (1-q)J_{n-1}(xd)\big)\}. \tag{41}$$

Considerar $\mathrm{f}_n^*(\mathrm{x}) := 1$ si $J_n(x) > h^+(x)$ y cero de otro modo.

3. Si $n \coloneqq N$, entonces la función de valor $J_N(S_0)$ es calculada y una política óptima π^* está dada por $\pi^* = (f_N^*, \dots, f_1^*, f_0^*)$. De otra manera, ir al paso 2.

El precio de la Opción Americana al tiempo n está dado por
$\boldsymbol{\pi_n^*}\,(S_n) \coloneqq J_{N-n}(S_n)$ y un tiempo óptimo de ejercicio para el periodo de tiempo $[n, N]$ es

$$\tau_n^* \coloneqq \inf\{k \in [n, \dots, N] \mid f_{N-k}^*(S_k) = 1\}. \tag{42}$$

Si se considera $\inf \emptyset \coloneqq N + 1$, entonces $\tau_n^* = N + 1$ significa que la opción nunca se ejerce.

Desde un punto de vista numérico es importante que, en todo punto de tiempo n, sólo un subconjunto de los precios de la acción en E pueda ser alcanzado y que es razonable calcular el valor de la función sólo en esos precios. Esto está de hecho en el algoritmo. El pago inmediato $h(x)$ que es obtenido cuando se ejerce la opción es llamado el *valor intrínseco* de la opción.

6. Solución del Problema

Se considera una opción Americana de compra con precio de ejercicio de $118. Se sabe que el precio del activo es de $100 y se considera el modelo binomial como el mercado financiero. ¿Cuál es el momento óptimo para hacer uso de la opción de compra Americana?
Puesto que se considera el modelo binomial como mercado financiero, se deben estimar los valores de **u** y **d**. Además, se debe conocer la tasa de interés en cuestión.
Después de realizar un análisis estadístico de los precios del activo se ha determinado que el cambio de precio relativo es de 1.1 y 0.9, para subir y para bajar, respectivamente. Se sabe que el precio del activo actual es de $100 y la tasa de interés en el mercado es del 3% por periodo. Luego, se tienen los siguientes datos:

- $S_0 = 100$,
- $\mathbf{u} = 1.1$ y $\mathbf{d} = 0.9$,
- $\mathrm{i} = 0.03$,
- $\mathrm{N} = 4$,
- $\mathrm{K} = 118$.

Por lo tanto, se considera $\beta = 0.97$, $\mathrm{q} = 0.65$ y la función de utilidad $h(x) = x - 120$, donde x es el precio del activo.
Se utiliza el Algoritmo de Precios para Opciones Americanas y el *software* R para calcular los posibles precios del activo en cada etapa del tiempo n. También, se calcula π^*, $\boldsymbol{\pi_n^*}\,(S_{n)}$ y τ_n^*.

Los precios posibles del activo se muestran en la Figura 1.

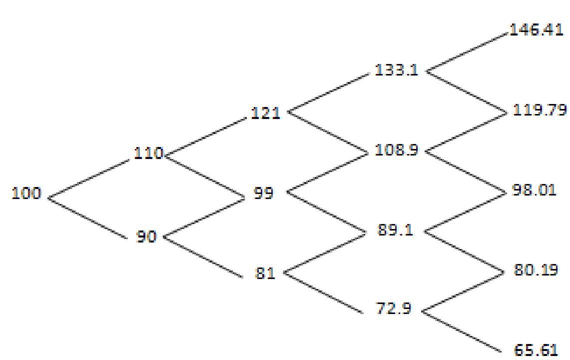

Figura 1. Evolución del precio de un activo en el modelo binomial en 4 etapas con precio inicial $S_0 = 100$.

Considerar $n = 0$ y definir para $x \in$ {146.41, 119.79, 98.01, 80.19, 65.61}

$$J_0(x) \coloneqq h^+(x),$$

de donde se tiene $J_0(146.41) = 28.41$, $(119.79\,) = 1.79$ y $J_0(x) = 0$, para $x = 98.01, 80.19, 65.61$. Por lo tanto, $f_0^+(x) = 1$, si $x = 146.41$ ó $x = 119.79$, y que en cualquier otro caso se tiene $f_0^+(x) = 0$.
Ahora, calcular

$$J_n(x) \coloneqq \max\{\, h^+(x)\,, \beta\big(qJ_{n-1}(x\boldsymbol{u}) + (1-q)J_{n-1}(x\boldsymbol{d})\big)\}$$

para todo $x \in${100.00, 90.00, 110.00, 81.00, 99.00, 121.00, 72.90, 89.10, 108.90, 133.10}, con $\beta \approx 0.97$, $q = 0.65$ y $h(x) = x - 118$, para $n = 1,2,3,4$. La Tabla 1 muestra los valores de $J_n(x)$ para cada posible precio de x, con $n = 0, 1, 2, 3$ y 4.

J_0	J_1	J_2	J_3	J_4
28.41	18.54	12.08	7.87	5.12
1.79	1.13	0.71	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

Tabla 1. Valores de J_n.

La Tabla 2, en el caso de que el precio sea $x = 146.41$, muestra que la política óptima es $\pi^* = (0{,}0{,}0{,}0{,}1)$ y se observa que el precio de la opción al tiempo $n = 0$ es $\pi_0(100) = J_4(100) = 5.12$ y el tiempo óptimo de ejercicio es $\tau^* = 4$, es decir, en la etapa $N = 4$, con una ganancia de $h(146.4) = 28.4$.

N	n	x	$h(x)$	$\beta(qJ_{n-1}(x\boldsymbol{u})+ (1-q)J_{n-1}(x\boldsymbol{d}))$	$J_n(x)$	$f_n^*(x)$
4	0	146.4	28.4		28.4	1
3	1	133.1	15.1	18.54	18.54	0
2	2	121	3	12.08	12.08	0
1	3	110	-8	7.87	7.87	0
0	4	100	-18	5.12	5.12	0

Tabla 2. Valores de $f_n^*(x)$.

7. Conclusiones

Considerar el caso especial de opción de compra Americana con precio de ejercicio K. El pago cuando se ejerce la opción está dado por $h(x) = x - K$. Es bien conocido que una estrategia óptima de ejercicio es esperar hasta la fecha de expiración N y entonces ejercer la opción si el precio de la acción es mayor que K. Así, el precio es el mismo como para una Opción de Compra Europea donde elegir, sí o no ejercer, es sólo dado al tiempo N. Se prueba esta declaración en el marco de Modelos de Decisión de Markov: Se afirma que para $n = 0, 1, \dots, N-1$ y $x \in E$:

$$h^+(x) \leq \beta\big(qJ_{n-1}(x\boldsymbol{u}) + (1-q)J_{n-1}(x\boldsymbol{d})\big) \tag{43}$$

lo que implica que $f_n^*(x) = \cdots = f_N^*(x) = 0$ es una estrategia óptima de ejercicio, es decir, no ejercemos hasta el tiempo N. La desigualdad anterior es cierta puesto que

$$\begin{aligned}\beta(qJ_n(x\boldsymbol{u})+(1-q)J_n(x\boldsymbol{d})) &\geq \beta(qJ_0(x\boldsymbol{u})+(1-q)J_0(x\boldsymbol{d}))\\ &\geq qJ_0(\beta x\boldsymbol{u})+(1-q)J_0(\beta x\boldsymbol{d})\\ &\geq J_0(q\beta x\boldsymbol{u}+(1-\mathrm{q})\beta x\boldsymbol{d})\\ &\geq J_0(x)=h^+(x)\end{aligned}$$

donde se usa la convexidad de J_0 y la propiedad del precio descontado de una acción bajo $\mathbb{Q}$.

8. Código

Se utiliza el programa R para los cálculos.
Las siguientes líneas de código calculan la política $\boldsymbol{\pi}^*$, el precio $\boldsymbol{\pi_n}$ y el momento óptimo de ejercicio τ_n^* al tiempo n para una opción de compra Americana (o venta si se considera $\mathrm{h(x)=K-x}$ como la ganancia al momento de ejercer), donde se consideran N etapas, un mercado financiero binomial con $\mathbf{d}$ y $\mathbf{u}$ como los cambios de precios relativos, el precio S_0 de un activo al tiempo $n=0$ (al momento de pactar la opción), una tasa de interés i por etapa y K como precio del ejercicio.

```
politica<- function(S0,u,d,i,K,N,n){
  b<-c()
  b<-(1+i)^(-1)
  q<-c()
  q<-(1+i-d)/(u-d)
  f=rep(0,N+1)
  S<-rep(0,(N*(N+1)/2))
  S[1]<-S0
  X=rep(0,N+1)
  J0<-c()
  x<-c()
  count<- 2
  for(t in 1:N){
    for(k in 0:i){
      S[count]= S0*d^(t-k)*u^k
      count<- count +1
    } }
  for(k in 0:N){
    X[k+1]= S0*d^k*u^(N-k)
    h=X-K
    J0[k+1]=max(0,h[k+1])
    if(h[k+1]>=0)
      f[k+1]=1
    lanbda<-which(f>0)
    for(j in 1:length(lanbda)){
      x[j]=X[j]
    }}
  y<-c(f,X,J0,h)
  Y<-matrix(y,ncol=4)
 A<- matrix(0,N+1,N+1)
  for(j in 1:N){
    Z<-c()
    for(k in 0:(N-j)){
      Z[k+1]=S0*d^k*u^(N-j-k)
```

```
    }
    A[1:length(Z),j+1]=Z
    A[,1]=X
  }
  J<-matrix(0,N+1,N+1)
  J[,1]<-J0
 for(t in 2:(N+1)){
   D<-c()
    for(j in 1:(N+2-t)){
   D[j]= max(A[,t][j]-K, b*(q*(J[,t-1][j]) + (1-q)*(J[,t-1][j+1])))
    }
   J[1:length(D),t]=D
 }
  W<-matrix(0,N+1,N+1)
  for(t in 2:(N+1)){
    D<-c()
    for(j in 1:(N+2-t)){
      D[j]= b*(q*(J[,t-1][j]) + (1-q)*(J[,t-1][j+1]))
    }
    W[1:length(D),t]=D
  }
  H<-matrix(0,N+1, N+1)
  H[,1]<-J0
  for(t in 2:(N+1)){
    D<-c()
    for(j in 1:(N+2-t)){
      D[j]= A[,t][j]-K
    }
    H[1:length(D),t]=D
  }
  P<-matrix(0,N+1,N+1)
  for(j in 1:(N+1)){
    for(r in 1:(N+1)){
      if(H[j,r]> W[j,r])
        P[j,r]=1
    }}
  Politica<-matrix(0,length(x), N+1)
  for(j in 1:length(x)){
    Politica[j,]<-P[j,]
  }
  precio.opcion<-c()
  precio.opcion<-J[,n+1]
  tau<-rep(0,(N+1)*(N+1))
  for(j in 1:(N+1)){
    for(i in 1:(N+1)){
      if(P[i,j]>0)
        tau[j*i]<-j
    }}
   tau.estrella1<-max(tau)
  tau.estrella<- N+1-tau.estrella1
  print(tau.estrella)
  print(precio.opcion)
  return(Politica)
}
```

9. Agradecimientos

Agradezco al Concejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) el apoyo otorgado a través de la Beca para Estudios de Maestría, la cual me permitió tener el tiempo necesario para la realización de este trabajo.

10. Referencias

[1] Bäuerle N. and Rieder U. "Markov Decision Processes with Applications to Finance", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.

[2] Hernández-Lerma O. and Laserre J.B., "Discrete-Time Markov Processes: Basic Optimality Criteria". Springer-Verlag New York, Inc., 1996.

[3] Willmott P., Howison S. and Dewynne J., "The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction", New York, 1995.

[4] Hull J., "Options, Futures, and Other Derivates", Prentice Hall, Inc, 2009.

[5] "GUÍA PARA LOS FUNDAMENTOS PARA LA DIRECCIÓN DE PROYECTOS" (GUÍA DEL PMBOK®, Project Management Institute (PMI), 2008.