Journal of Basic Sciences, Vol. 4 (**11**), pp. 1-15, mayo-agosto 2018

JOURNAL OF BASIC SCIENCES

Inferencia Fiducial para la Distribución Gamma

Edilberto Nájera Rangel*, Fernando López Casaux, Addy Margarita Bolivar Cimé
División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco,
Cunduacán, C.P. 86690, Tabasco, México.
*edilberto.najera@ujat.mx

Recibido: 25 de marzo de 2018. Aceptado: 30 julio 2018. Publicado: 1 de agosto de 2018.

Resumen

Engen y Lillegard [5] propusieron un método, revisado posteriormente por Lindqvist y Taraldsen [14], para realizar simulaciones de Monte Carlo condicionando sobre una estad ística suficiente. La idea básica consiste en ajustar los valores del parámetro en la correspondiente simulación no condicionada, de modo que se obtenga el valor observado de la estadística. De este modo, aparentemente sin ser el objetivo, proponen también un simulador de una posible distribución fiducial del parámetro. Lindqvist y Taraldsen observaron que en el caso de un modelo de grupo el método de Engen y Lillegard produce simulaciones de la bien aceptada distribución fiducial del parámetro. En este trabajo mostramos de manera clara como al aplicar el simulador de Engen y Lillegard a la distribución gamma (α, β), la cual no define un modelo de grupo (ver, por ejemplo, [19]), se obtiene la distribución fiducial de (α, β) que satisface el criterio de unicidad de Brillinger [2].

Palabras clave: *Estadística suficiente minimal, Cantidad pivotal, Modelo de grupo, Simulación de Monte Carlo.*

Abstract

Engen and Lillegard [5] proposed a method, reviewed later by Lindqvist and Taraldsen [14], to do Monte Carlo simulation conditioned over a sufficient statistic. The basic idea consists in fit the parameters to the corresponding non conditioned simulation, in such a way that we obtain the observed value of the sufficient statistic. In this way, apparently without that objective, they also proposed a simulator of a possible fiducial distribution of the parameter. Lindqvist and Taraldsen observed that in the case of a group model the Engen and Lillegard method produces simulations of the well accepted fiducial distribution of the parameter. In this work we show clearly how applying the Engen and Lillegard simulator to the gamma(α, β) distribution, which does not have a group model (see, for example, [19]), it is obtained the fiducial distribution of (α, β) which satisfies the unicity criterion given by [2].

Keywords: Minimal sufficient statistic, Pivotal quantity, Group model, Monte Carlo Simulation.

Journal Of Basic Sciences, Vol 4 (11), pp. 1-15, Mayo-Agosto 2018

1. Introducción

Aunque en la década de los 80 del siglo pasado algunos miembros de la comunidad estadística pensaban que el argumento fiducial había tenido una utilidad muy limitada y ya se le daba por terminado (ver, por ejemplo, [21]), actualmente la inferencia fiducial es un campo de investigación muy activo, como lo atestiguan los trabajos de los autores que aparecen enseguida en orden cronológico, de acuerdo a las fechas de publicación de sus artículos, de 1998 a 2017: Effron [4], Wang [24], Schwder y Hjort [18], O'Reilly y Rueda [17], Wang e Iyer [23], Frenkel [8], Hannig [10] y [11], Taraldsen y Lindqvist [19], Veronese y Melilli [22], Taraldsen y Lindqvist [20], Hannig *et al.* [12], Nájera y O'Reilly [16] y Taraldsen y Lindqvist [21].

En un artículo cuyo propósito es mostrar un método para simular muestras condicionales dado el valor de una estadística suficiente, digamos $T = t$, Engen y Lillegård [5] usan un paso intermedio en su proceso, el cual simula un valor del parámetro θ dado que se observó t, en clara conección con una interpretación fiducial. Lindqvist y Taraldsen [14] demostraron que el procedimiento, que simula muestras condicionales, digamos x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, dado $T = t$, produce las muestras correctas cuando la distribución de interés define un modelo de grupo, es decir, cuando existe una cantidad pivotal en el sentido clásico. Sin embargo, Lindqvist *et al.* [13] demostraron que en general las muestras x_1^*, x_2^*, ..., x_n^* no se pueden tomar como muestras condicionales dado $T = t$.

Aunque el método de Engen y Lillegård no fue pensado explícitamente para simular valores, digamos $\tilde{\theta}_1$, $\tilde{\theta}_2$, ..., $\tilde{\theta}_M$, de la distribución fiducial del parámetro θ, mostramos que bajo condiciones más generales que la existencia de un modelo de grupo, dicho método también produce un generador fiducial.

En la sección 2 describimos de forma sucinta el generador fiducial de Engen y Lillegård. Para poner en perspectiva algunos resultados bien conocidos en inferencia fiducial, y ver la naturaleza del método de Engen y Lillegård, en la sección 3 vemos el ejemplo de la distribución $N\left(\mu,\sigma^2\right)$, donde hay un modelo de grupo (ver [7]); como es de esperarse, el procedimiento de Engen y Lillegård reconstruye tales resultados. En la sección 4 obtenemos el generador fiducial para el caso específico de la distribución $gamma(\alpha,\beta)$, donde no es posible definir un modelo de grupo (ver [19]), y mostramos que la distribución fiducial que se deduce satisface el criterio de unicidad de Brillinger [2]. También se obtiene numéricamente la distribución fiducial para varios tamaños de muestras aleatorias de la distribución $gamma(\alpha,\beta)$, cuando $\alpha = 3$ y $\beta = 5$. En cada caso la distribución fiducial es comparada con la correspondiente distribución final bayesiana cuando la inicial es la no informativa de Jeffreys. Por último, en la sección 5 hacemos algunos comentarios sobre ciertos resultados obtenidos, así como sobre el panorama actual de la inferencia fiducial.

2. El generador fiducial de Engen y Lillegård

Sea $\underline{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ un vector de variables aleatorias independientes de la distribución de probabilidad $F(\cdot;\theta)$, donde θ es el parámetro desconocido de la distribución, y sea $T(\underline{X})$ un estadístico suficiente para θ. Sea U una variable aleatoria de una distribución conocida, tal que para θ dado, X, con distribución $F(\cdot;\theta)$, puede ser simulada por medio de U. Si $U_1, U_2, ..., U_n$ son variables aleatorias independientes con

$U_n, \theta)),$
el vector de variables aleatorias independientes generadas por este método, y por $T(\underline{U};\theta)$ a $T\left(\chi(\underline{U};\theta)\right)$, el cual tiene la misma distribución que $T(\underline{X})$.

Ahora supongamos que se observa un valor de T, o sea, se observa $T = t$. Para $\underline{U} = \underline{u}$ fijo, la ecuación

$$T(\underline{u};\theta) = t \tag{1}$$

puede o no tener solución única para θ. Si tiene solución única, entonces generando observaciones $\underline{u}_1, \underline{u}_2, ...\underline{u}_m$ de $\underline{U}$, obtenemos valores $\widetilde{\theta}_1, \widetilde{\theta}_2, ..., \widetilde{\theta}_m$ que satisfacen la ecuación (1). Estos valores de θ así obtenidos son una muestra de una cierta distribución del parámetro, habiendo observado t. Esta distribución así inducida es la distribución fiducial.

3. El caso de la distribución $N\left(\mu,\sigma^2\right)$

La distribución $N(\mu,\sigma^2)$ tiene estructura de grupo (ver [7]), y por ello existe una cantidad pivotal a partir de la cual se induce la distribución fiducial para $\theta = (\mu,\sigma^2)$, habiendo observado t. No obstante, para entender la idea del generador fiducial (implícito) de Engen y Lillegård [5], es de interés revisar de nuevo este caso.

3.1 Enfoque tradicional

De acuerdo con Brillinger [2], Fisher dio ejemplos acerca de la obtención de distribuciones fiduciales multivariadas. Si X, Y son variables aleatorias con densidad bivariada $f(x, y; \alpha,\beta)$, los ejemplos parecen indicar que Fisher requería que la densidad tenga la propiedad

$$f(x, y; \alpha,\beta) = f(x; \alpha)f(y \mid x; \alpha,\beta). \tag{2}$$

Entonces la distribución fiducial se obtiene como sigue: de $f(x; \alpha)$ encuentra la densidad fiducial de α, $f(\alpha)$. Después, considerando α fijo, a partir de $f(y \mid x; \alpha,\beta)$ encuentra la densidad fiducial de β, $f(\beta \mid \alpha)$. La densidad fiducial conjunta requerida es el producto de las dos últimas densidades fiduciales, es decir,

$$f(\alpha,\beta) = f(\alpha)f(\beta \mid \alpha).$$

En contraste con Fisher, Quenouille (otra vez de acuerdo con Brillinger [2]) requiere que la densidad pueda factorizarse como

$$f(x, y; \alpha,\beta) = f(x; \alpha,\beta)f(y \mid x; \beta). \tag{3}$$

Justifica esta factorización por medio del siguiente argumento de suficiencia: X es suficiente para α, por lo tanto, para β fijo se puede usar $f(x; \alpha,\beta)$ para obtener la distribución fiducial de α dado β. Ahora, con x fija, Y es “casi suficiente”para β (ver Brillinger [2]), de donde se sigue que se puede emplear $f(y \mid x; \beta)$ para obtener la

Journal Of Basic Sciences, Vol 4 (11), pp. 1-15, Mayo-Agosto 2018

distribución fiducial de β. Otra vez, la distribución fiducial conjunta que se requiere es el producto de las dos distribuciones fiduciales individuales.

En el caso de independencia, las factorizaciones (2) y (3) llevan a expresiones que tienen la misma forma, porque de (2) y por la independencia de X y Y,

$$\begin{aligned} f(x,y;\alpha,\beta) &= f(x;\alpha)f(y \mid x;\alpha,\beta) \\ &= f(x;\alpha)f(y;\alpha,\beta). \end{aligned}$$

Ahora por (3) e independencia de X y Y,

$$\begin{aligned} f(x,y;\alpha,\beta) &= f(x;\alpha,\beta)f(y \mid x;\beta) \\ &= f(x;\alpha,\beta)f(y;\beta). \end{aligned}$$

Desafortunadamente, en el caso de no-independencia ninguna de las factorizaciones (2) y (3) es suficiente para obtener una distribución fiducial única (ver Brillinger [2]).

Para demostrar el teorema 1, haremos uso de la siguiente proposición, cuya demostración puede consultarse, por ejemplo, en [15].

Proposición 1. Sea T una variable aleatoria cuya familia de densidades o de probabilidades es $\{g(t;\theta) : \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}\}$, tal que para $\theta_1 < \theta_2$,

$$\frac{g(t;\theta_2)}{g(t;\theta_1)}$$

es creciente como función de t. Entonces

$$P_{\theta_2}(T \le t) \le P_{\theta_1}(T \le t),$$

es decir, la función de distribución de T es decreciente como función de θ.

La demostración del siguiente teorema esencialmente está implícita en [2].

Teorema 1. Si $\underline{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ es un vector de variables aleatorias independientes de la distribución $N\left(\mu,\sigma^2\right)$, entonces la densidad fiducial de (μ,σ) es

$$\begin{aligned} f(\mu,\sigma) = {} & \frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{n}{2\sigma^2}(\overline{x}-\mu)^2\right) \frac{1}{(\frac{1}{2}(n-3))!} \\ & * \left(\frac{(n-1)s^2}{2\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)} \exp\left(-\frac{(n-1)s^2}{2\sigma^2}\right) \frac{2}{\sigma}, \end{aligned} \tag{4}$$

donde $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ y $\underline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ es una observación de $\underline{X}$.

Journal Of Basic Sciences, Vol 4 (11), pp. 1-15, Mayo-Agosto 2018

Prueba. Como $\overline{X}$ y S^2 son independientes (ver, por ejemplo, Casella y Berger [3]) y la distribución de S^2 solo depende del parámetro σ, se tiene,

$$f(\overline{x}, s; \mu,\sigma) = f(\overline{x}; \mu,\sigma) f(s^2; \sigma).$$

Ahora, dado que $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$, entonces se comprueba que $S^2 \sim gamma\left(\frac{n-1}{2}, \frac{2\sigma^2}{n-1}\right)$, es decir,

$$f(s^2; \sigma) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{2\sigma^2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}} \left(s^2\right)^{\frac{n-1}{2}-1} \exp\left(-\frac{(n-1)s^2}{2\sigma^2}\right).$$

Como $f(s^2; \sigma_2)/f(s^2; \sigma_1)$ es creciente como función de s^2 si $\sigma_1 < \sigma_2$, entonces, por la proposición 1, la función de distribución de S^2, $F(s^2; \sigma)$, es decreciente como función de σ. Por lo tanto, en este caso la función de distribución fiducial de σ se define como (ver Brillinger [2]) $F(\sigma) = 1 - F(s^2; \sigma)$, y la densidad fiducial de σ es

$$\begin{aligned} f(\sigma) &= -\frac{d}{d\sigma} F(s^2; \sigma) \\ &= \frac{2\left(s^2\right)^{\frac{n-1}{2}} \exp\left(-\frac{(n-1)s^2}{2\sigma^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} \sigma^n} \\ &= \frac{1}{(\frac{1}{2}(n-3))!} \left(\frac{(n-1)s^2}{2\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)} \exp\left(-\frac{(n-1)s^2}{2\sigma^2}\right) \frac{2}{\sigma}. \end{aligned} \tag{5}$$

Por otro lado, si σ es conocido, entonces $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$. Si Φ es la función de distribución normal estándar, $F(\overline{x}; \mu,\sigma) = P(\overline{X} \leq \overline{x}) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{x} - \mu)}{\sigma}\right)$, de donde se tiene que la función de distribución de $\overline{X}$ es decreciente como función de μ. Así, la función de distribución fiducial de μ dado σ es $F(\mu \mid \sigma) = 1 - F(\overline{x} : \mu,\sigma) = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{x} - \mu)}{\sigma}\right)$, y la densidad fiducial de μ dado σ es

$$\begin{aligned} f(\mu \mid \sigma) &= -(d/d\mu) F(\overline{x}; \mu,\sigma) \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{n(\mu - \overline{x})^2}{2\sigma^2}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

De (5) y (6) obtenemos (4), la densidad fiducial conjunta de μ y σ. ■

Observación 1. La densidad fiducial de (μ,σ) del teorema 1 coincide con la que obtuvo Fisher [6] en 1935.

Journal Of Basic Sciences, Vol 4 (11), pp. 1-15, Mayo-Agosto 2018

3.2 Enfoque usando el generador fiducial de Engen y Lillegård

Primero obtendremos el generador de Engen y Lillegård de la distribución fiducial de (μ,σ), a partir del cual veremos que se obtiene la densidad fiducial (4).

El resultado del teorema que se enuncia enseguida y su demostración básicamente están dados en [14].

Teorema 2. Si $\underline{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ es un vector de variables aleatorias independientes con distribución $N\left(\mu,\sigma^2\right)$, entonces el generador fiducial de Engen y Lillegård de (μ,σ) es

$$(\mu,\sigma) = \left(\overline{x} - \frac{\overline{u}}{s_u} s, \frac{1}{s_u} s\right), \tag{7}$$

donde $\underline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ es una observación de $\underline{X}$, $\underline{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ es una observación de $\underline{U} = (U_1, U_2, \cdots, U_n)$, un vector de variables aleatorias independientes de la distribución $N(0,1)$, $\overline{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i$ y $s_u^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \overline{u})^2$.

Prueba. El estadístico $T(X_1, X_2, ..., X_n) = (\overline{X}, S)$ es suficiente minimal para $\theta = (\mu,\sigma)$ y las variables aleatorias $h(U_i, \theta) = \mu + \sigma U_i$ son independientes con distribución $N(\mu,\sigma^2), i = 1, ..., n$. De aquí

$$\chi(\underline{U};\theta) = (\mu + \sigma U_1, \mu + \sigma U_2, ..., \mu + \sigma U_n).$$

Si $W_i = \mu + \sigma U_i, i = 1 \ldots, n$, entonces

$$\overline{W} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mu + \sigma U_i) = \mu + \frac{\sigma}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i = \mu + \sigma\overline{U}.$$

También

$$\begin{aligned} S_W^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(W_i - \overline{W})^2 \\ &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mu + \sigma U_i - \mu + \sigma\overline{U})^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(U_i - \overline{U})^2 \\ &= \sigma^2 S_U^2. \end{aligned}$$

De aquí

$$T(\underline{U};\theta) = (\overline{W}, S_W) = \left(\mu + \sigma\overline{U}, \sigma S_U\right). \tag{8}$$

Journal Of Basic Sciences, Vol 4 (11), pp. 1-15, Mayo-Agosto 2018

Si $t = (\overline{x}, s)$ y $\underline{U} = \underline{u}$, de la ecuación (1) resulta

$$(\mu + \sigma\overline{u}, \sigma s_u) = (\overline{x}, s)\,,$$

de donde se tienen las siguientes ecuaciones

$$\mu + \sigma\overline{u} = \overline{x}$$

$$\sigma s_u = s.$$

Resolviendo para μ y σ,

$$\mu = \overline{x} - \frac{\overline{u}}{s_u}s$$

y

$$\sigma = \frac{s}{s_u},$$

de donde se tiene (7). ∎

Observación 2. Si $(U_1, U_2, ..., U_n)$ es un vector de variables aleatorias independientes de la distribución $N\,(0, 1)$, entonces

$$\overline{U} \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right)$$

y

$$(n-1)S_U^2 \sim \chi^2_{n-1},$$

donde $\overline{U}$ y S_U^2 son independientes. Si $Z \sim N(0,1)$, entonces $\dfrac{Z}{\sqrt{n}} \sim N(0, \dfrac{1}{n})$. También, si $\xi^2 \sim \chi^2_{n-1}$, entonces haciendo $(n-1)S_u^2 = \xi^2$, se tiene $S_u = \dfrac{\xi}{\sqrt{n-1}}$. Por lo tanto, de (7) vemos que para simular cada par $(\mu,\sigma\,)$ basta generar, de manera independiente, una observación de la distribución $N\,(0, 1)$, digamos z, y una observación de la distribución χ^2_{n-1}, digamos ξ^2. Entonces en (7) sustituimos $\overline{u}$ y s_u por $\frac{z}{\sqrt{n}}$ y $\frac{\xi}{\sqrt{n-1}}$, respectivamente, obteniendo

$$\begin{aligned}
(\mu,\sigma\,) &= \left. \overline{x} - \frac{\frac{z}{\sqrt{n}}}{\frac{\xi}{\sqrt{n-1}}}s, \frac{1}{\frac{\xi}{\sqrt{n-1}}}s \right) \\
&= \left. \overline{x} - \frac{z}{\frac{\xi}{\sqrt{n-1}}}\frac{s}{\sqrt{n}}, \frac{\sqrt{n-1}}{\xi}s \right). \qquad (9)
\end{aligned}$$

Así, para generar m pares de $(\mu,\sigma\,)$ es suficiente generar m pares de observaciones independientes, cada par formado por una observación de la distribución $N\,(0, 1)$ y una de la distribución χ^2_{n-1}. Este procedimiento es mucho más corto que el obtenido al aplicar directamente el generador de Engen y Lillegård, ya que en este último para generar cada par de $(\mu,\sigma\,)$ primero se simulan n observaciones independientes de la distribución normal estándar, y después se obtienen la media y la desviación estándar muestrales.

Journal Of Basic Sciences, Vol 4 (11), pp. 1-15, Mayo-Agosto 2018

Observación 3. La igualdad (9) es la misma que obtuvo Fraser [7] cuando dedujo la distribución fiducial de (μ,σ), pero usando el hecho de que la distribución normal $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ define un modelo de grupo. Puesto que

$$\sigma = \frac{\sqrt{n-1}}{\xi} s$$

y la densidad de ξ es

$$f(\xi) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2})2^{\frac{n-1}{2}}} \xi^{n-2} 2 e^{\frac{-\xi^2}{2}},$$

se obtiene que la densidad fiducial de σ es

$$f(\sigma) = \frac{1}{(\frac{1}{2}(n-3))!} \left(\frac{(n-1)s^2}{2\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)} \exp\left(-\frac{(n-1)s^2}{2\sigma^2}\right) \frac{2}{\sigma},$$

la cual coincide con (5)

Ahora, como

$$\mu = \overline{x} - \frac{z}{\frac{\xi}{\sqrt{n-1}}} \frac{s}{\sqrt{n}} = \overline{x} - \frac{z}{\sqrt{n}}\sigma,$$

se deduce que la densidad fiducial de μ dado σ es

$$f(\mu \mid \sigma) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{n(\mu-\overline{x})^2}{2\sigma^2}\right),$$

que coincide con (6). Por lo tanto, como era de esperarse, la densidad fiducial conjunta de μ y σ coincide con la que se obtuvo en la sección 3.1.

4. Distribución gamma(α,β)

Un caso en el que la familia no es de grupo (ver por ejemplo [19]), pero en el que podemos utilizar el procedimiento de Engen y Lillegård [5] para generar muestras de la distribución fiducial, es el de la distribución $gamma(\alpha,\beta)$. Aunque dicho procedimiento no se diseñó para simular valores de los parámetros, sino para simular muestras condicionales, discutieron allí el caso $gamma(\alpha,\beta)$ y obtuvieron el algoritmo correspondiente.

La demostración del lema siguiente se puede hacer usando el teorema 6.2.13 de [3].

Lema 1. Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria de la distribución $gamma(\alpha,\beta)$. Entonces el estadístico

$$T(\underline{X}) = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i\right) \tag{10}$$

es suficiente minimal para (α,β).

Lema 2. Sea X variable aleatoria con distribución $gamma(\alpha,\beta)$. Si Y es una variable aleatoria con distribución $gamma(\alpha,1)$ y si $F_Y(y;\alpha)$ es su función de distribución, entonces X se puede escribir como

$$X = \beta F_Y^{-1}(U;\alpha),$$

donde U es una variable aleatoria con distribución $uniforme(0,1)$.

Journal Of Basic Sciences, Vol 4 (11), pp. 1-15, Mayo-Agosto 2018

Prueba. La variable aleatoria

$$Y = \frac{X}{\beta}, \tag{11}$$

tiene distribución $gamma(\alpha, 1)$. Como $F_Y(Y;\alpha)$ tiene distribución $uniforme(0, 1)$, si

$$F_Y(Y;\alpha) = U,$$

entonces de (11) se tiene

$$X = \beta Y = \beta F_Y^{-1}(U,\alpha).$$

■

El resultado del siguiente teorema y su demostración esencialmente están dados en [5].

Teorema 3. Sean $x_1, x_2, ..., x_n$ observaciones de la muestra aleatoria $X_1, X_2, ..., X_n$ de la distribución $gamma\,(\alpha,\beta)$. Entonces el generador de Engen y Lillegård de la densidad fiducial conjunta de α y β está definido por las ecuaciones

$$\beta^n \prod_{i=1}^{n} F_Y^{-1}(u_i, \alpha) = t_1 \tag{12}$$

$$\beta \sum_{i=1}^{n} F_Y^{-1}(u_i, \alpha) = t_2, \tag{13}$$

donde $u_1, \ldots, u_n$ son observaciones de la muestra aleatoria $U_1, \ldots, U_n$ de la distribución $uniforme(0, 1)$, $F_Y(y;\alpha)$ es la función de distribución de una variable aleatoria Y con distribución $gamma(\alpha, 1)$ y

$$(t_1, t_2) = \left. \prod_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} x_i \right).$$

Prueba. Por el lema 2,

$$X_1 = \beta F_Y^{-1}(U_1, \alpha), \ldots, X_n = \beta F_Y^{-1}(U_n, \alpha),$$

luego el estadístico suficiente minimal (10) queda como

$$T(\underline{U};\alpha,\beta) = \left. \beta^n \prod_{i=1}^{n} F_Y^{-1}(U_i, \alpha), \beta \sum_{i=1}^{n} F_Y^{-1}(U_i, \alpha) \right). \tag{14}$$

El resultado se obtiene sustituyendo $(X_1, \ldots, X_n)$ por $(x_1, \ldots, x_n)$ en (10), sustituyendo $(U_1, \ldots, U_n)$ por $(u_1, \ldots, u_n)$ en (14) e igualando las expresiones correspondientes obtenidas. ■

Journal Of Basic Sciences, Vol 4 (11), pp. 1-15, Mayo-Agosto 2018

Observación 4. De las ecuaciones (12) y (13) se tiene

$$\frac{\sum_{i=1}^n F_Y^{-1}(u_i,\alpha)}{\left(\prod_{i=1}^n F_Y^{-1}(u_i,\alpha)\right)^{\frac{1}{n}}} = \frac{t_2}{t_1^{1/n}}. \tag{15}$$

Como el lado izquierdo de (15) es decreciente como función de α (ver [5]), esta ecuación tiene solución única para α. Aunque no la podemos resolver analíticamente, podemos aproximar numéricamente la solución. El valor de β lo encontramos, por ejemplo, por medio de la ecuación

$$\beta \sum_{i=1}^n F_Y^{-1}(u_i,\alpha) = t_2. \tag{16}$$

De esta forma podemos generar tantos valores de (α,β) como queramos, con los cuales podemos encontrar una estimación de la densidad fiducial conjunta de α y β, así como de las densidades marginales correspondientes.

Observación 5. Por el lema 1, el estadístico

$$(V_1, V_2) = \quad \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{\frac{1}{n}}}, \sum_{i=1}^n X_i \Bigg) \tag{17}$$

es suficiente minimal para (α,β). Además, Glaser [9] demostró que las variables V_1 y V_2 son independientes. Por el lema 2,

$$V_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \beta F_Y^{-1}(U_i,\alpha)}{\left(\prod_{i=1}^n \beta F_Y^{-1}(U_i,\alpha)\right)^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sum_{i=1}^n F_Y^{-1}(U_i,\alpha)}{\left(\prod_{i=1}^n F_Y^{-1}(U_i,\alpha)\right)^{\frac{1}{n}}}, \tag{18}$$

de donde se tiene que la distribución de V_1 sólo depende de α. Puesto que

$$V_2 = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n \beta F_Y^{-1}(U_i,\alpha) = \beta \sum_{i=1}^n F_Y^{-1}(U_i,\alpha) \tag{19}$$

de las ecuaciones (15) y (16) vemos que se satisface el criterio de unicidad de Brillinger [2] para la distribución fiducial de (α,β). Sin embargo, en este caso la relevancia del generador fiducial de Engen y Lillegård se debe a que no se conoce la distribución de V_1.

Observación 6. De las ecuaciones (18) y (19) vemos que el generador de Engen y Lillegård de la densidad fiducial conjunta de α y β también se obtiene a partir del estadístico suficiente minimal (V_1, V_2) dado en (17). Para conocer más sobre generadores fiduciales se puede consultar [16], por ejemplo.

Journal Of Basic Sciences, Vol 4 (11), pp. 1-15, Mayo-Agosto 2018

Observación 7. Sea α conocido. Por medio del teorema 6.2.13 de [3] se comprueba que V_2 es un estadístico suficiente minimal para β. Como $V_2 \sim gamma(n\alpha,\beta)$, entonces la función de densidad de V_2 satisface las hipótesis de la proposición 1. Derivando con respecto a β la función de distribución de V_2, e integrando por partes, se obtiene que la densidad fiducial de β dado α es

$$f(\beta \mid \alpha) = \frac{(v_2)^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{n\alpha+1} \exp\left(-\frac{v_2}{\beta}\right), \tag{20}$$

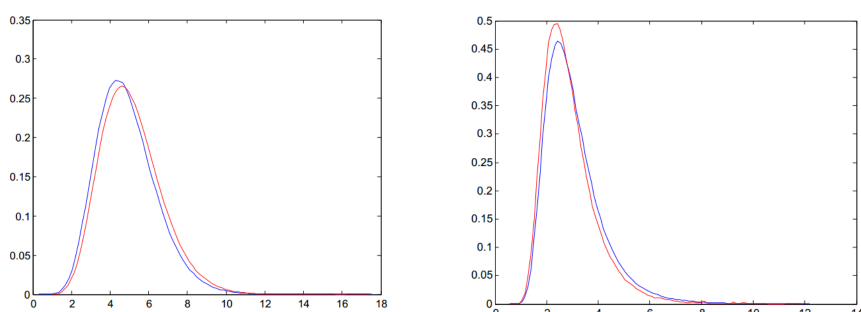
donde v_2 es una observación de V_2. De (20) se tiene que la densidad fiducial de $1/\beta$ dado α es $gamma\,(n\alpha, 1/v_2)$.

4.1 Ejemplos numéricos

Ejemplo 1. Se generaron muestras de tamaños $n = 20, 40$ y 100, de la distribución $gamma(\alpha,\beta)$, donde $\alpha = 3$ y $\beta = 5$. Con el generador de Engen y Lillegård (ecuaciones (15) y (16)) se estimaron las densidades fiduciales de α y β, cuyas gráficas aparecen en color azul en las figuras 1-3. Con el propósito de hacer las comparaciones respectivas, con las mismas muestras también se estimaron las correspondientes densidades finales bayesianas, cuando la distribución inicial es la no informativa de Jeffreys (ver, por ejemplo, [1]),

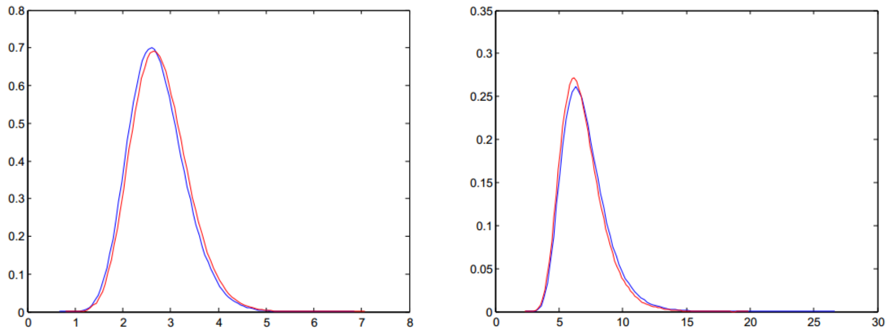
$$\pi(\alpha,\beta) \propto \frac{1}{\beta} \left(\alpha\psi'(\alpha) - 1\right)^{\frac{1}{2}},$$

donde $\psi(\alpha) = \dfrac{d}{d\alpha}(\log\Gamma(\alpha))$ es la función digamma y $\psi'(\alpha) = \dfrac{d\psi(\alpha)}{d\alpha}$. Las gráficas de las densidades finales bayesianas aparecen en color rojo en las mismas figuras, respectivamente.



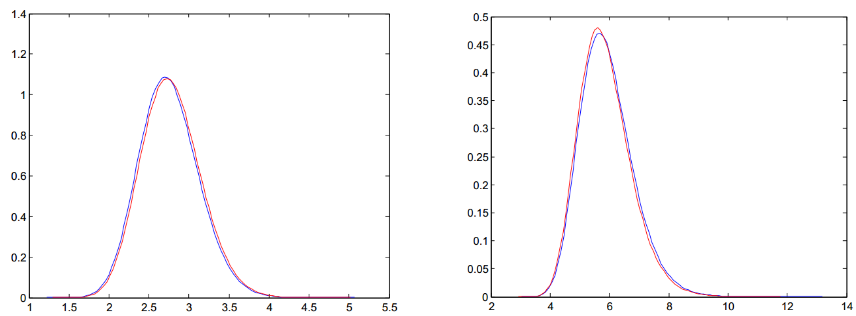
(a) Densidades de α (b) Densidades de β

Figura 1: Densidades fiduciales: color azul; densidades finales bayesianas: color rojo; $n = 20$.



(a) Densidades de α (b) Densidades de β

Figura 2: Densidades fiduciales: color azul; densidades finales bayesianas: color rojo; $n = 40$.

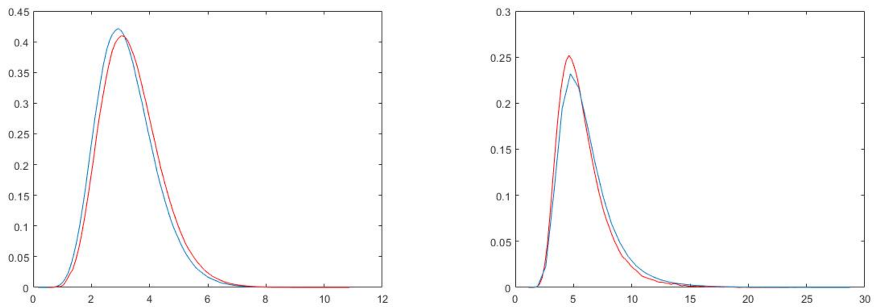


(a) Densidades de α (b) Densidades de β

Figura 3: Densidades fiduciales: color azul; densidades finales bayesianas: color rojo; $n = 100$.

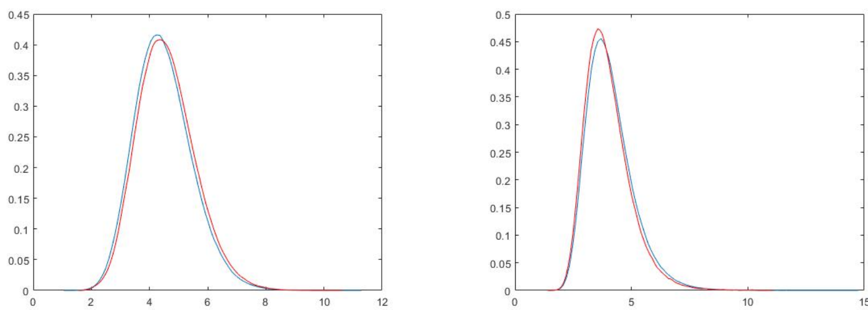
Ejemplo 2. Otra vez se generaron muestras de tamaños $n = 20, 40$ y 100, de la distribución $gamma(\alpha,\beta)$, pero ahora con $\alpha = 5$ y $\beta = 3$. Se hizo lo mismo que en el ejemplo 1 y las gráficas correspondientes aparecen en las figuras 4-6.

Journal Of Basic Sciences, Vol 4 (11), pp. 1-15, Mayo-Agosto 2018



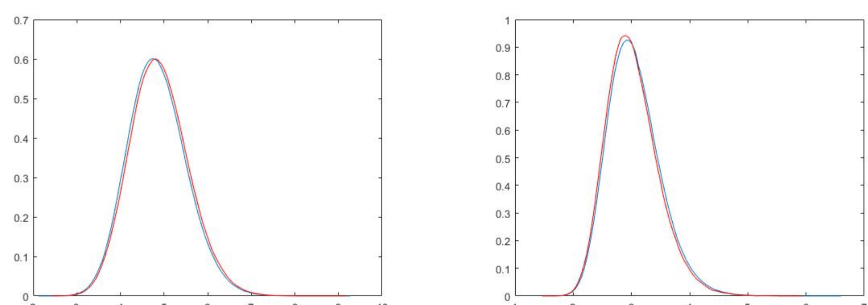
(a) Densidades de α (b) Densidades de β

Figura 4: Densidades fiduciales: color azul; densidades finales bayesianas: color rojo; $n = 100$.



(a) Densidades de α (b) Densidades de β

Figura 5: Densidades fiduciales: color azul; densidades finales bayesianas: color rojo; $n = 100$.



(a) Densidades de α (b) Densidades de β

Figura 6: Densidades fiduciales: color azul; densidades finales bayesianas: color rojo; $n = 100$.

En ambos ejemplos se observa que a medida que n crece, las densidades fiduciales

Journal Of Basic Sciences, Vol 4 (11), pp. 1-15, Mayo-Agosto 2018

y finales bayesianas son más parecidas, lo que era de esperarse, porque la distribución inicial bayesiana que se usó es no informativa, y porque en el caso bayesiano conforme el tamaño de la muestra es más grande la distribución inicial tiene menos influencia en la distribución final. Además, en este caso la diferencia esencial en los enfoques bayesiano y fiducial es la ausencia de una distribución inicial bajo el argumento fiducial.

5. Comentarios finales

Para el caso de la distribución $gamma(\alpha,\beta)$, hemos mostrado que la distribución fiducial de (α,β) está bien definida. Dicha distribución podría ser empleada en estadística frecuentista (clásica) para hacer inferencia, por ejemplo determinar intervalos de confianza y realizar pruebas de hipótesis.

Referencias

[1] J. M. Bernardo and A. F. M. Smith, *Bayesian Theory* (John Wiley & Sons, England, 2004).

[2] D. R. Brillinger, Examples Bearing on the Definition of Fiducial Probability with a Bibliography. *Ann. Math. Stat.*, (4) **33** (1962) 1349-1355.

[3] G. Casella and R. L Berger, *Statistical Inference* (Duxbury, USA, 2002).

[4] B. Efron, R. A. Fisher in the 21st Century. *Stat. Sci.*, **13** (1998) 95-122.

[5] S. Engen and M Lillegård, Stochastic Simulations Conditioned on Sufficient Statistics. *Biometrika*, (1) **84** (1997) 235-240.

[6] R. A. Fisher, The Fiducial Argument in Statistical Inference. *Ann. Eugenics*, **6** (1935) 391-398.

[7] D. A. S. Fraser, The Fiducial Method and Invariance. *Biometrika*, **48** (1961) 261-280.

[8] R. B. Frenkel, Fiducial Inference Applied to Uncertainty Eestimation When the Identical Readings are Obtained Under Low Instrument Resolution. *Metrologia*, (6) **46** (2009) 661-667.

[9] R. E. Glaser, The Ratio of the Geometric Mean to the Arithmetic Mean for a Random Sample from a Gamma Distribution. *J. Am. Stat. Assoc.*, (354) **71** (1976) 480-487.

[10] J. Hannig, On Generalized Fiducial Inference. *Stat. Sin.*, (29) **19** (2009) 491-544.

[11] J. Hannig, Generalizad Fiducial Inference Via Discretization. *Stat. Sin.*, **23** (2013) 489-514.

[12] J. Hannig, H. Iyer, R. C. S. Lai and T. C. M. Lee, Generalized Fiducial Inference: A Review and new Results. *J. Am. Stat. Assoc.*, (515) **111** (2016) 1346-1361.

[13] B. H. Lindqvist, G. Taraldsen, M. Lillegård, and S. Engen, A Counterexample to a Claim About Stochastic Simulations. *Biometrika*, **90** (2003) 489-490.

[14] B. H. Lindqvist and G. Taraldsen, Monte Carlo Conditioning on a Sufficient Statistic. *Biometrika*, (2) **92** (2005) 451-464.

Journal Of Basic Sciences, Vol 4 (11), pp. 1-15, Mayo-Agosto 2018

[15] E. Nájera Rangel, B. G. Peralta Reyes y A. Pérez Pérez, Teorema de Karlin - Rubin y Ejemplos no Clásicos. *Journal of Basic Sciences*, (4) **2** (2016) 1-11.

[16] E. Nájera and F. O'Reilly, On fiducial Generators. *Commun. Stat. - Theory Methods*, (5) **46** (2017) 2232-2248.

[17] F. O'Reilly and R. Rueda, Fiducial Inferences for the Truncated Exponential Distribution. *Commun. Stat. - Theory Methods*, (12) **36** (2007) 2207-2212.

[18] T. Schweder and N. L. Hjort, Confidence and Likelihood. *Scand. J. Stat.*, **29** (2002) 309-332.

[19] G. Taraldsen and B. H. Lindqvist, Fiducial Theory and Optimal Inference. *Ann. Stat.*, (1) **41** (2013) 323-341.

[20] G. Taraldsen and B. H. Lindqvist, Fiducial and Posterior Sampling. *Commun. Stat. - Theory Methods*, (17) **44** (2015) 3754-3767.

[21] G. Taraldsen and B. H. Lindqvist, Conditional Fiducial Models. *J. Stat. Plan. Infer.*, (2017), https://doi.org/10.1016/j.jspi.2017.09.007.

[22] P. Veronese and E. Melilli, Fiducial and Confidence Distributions for Real Exponential Families. *Scand. J. Stat.*, https://doi.org/10.1111/sjos.12117

[23] C. M. Wang and H. K. Iyer, Fiducial Intervals for the Magnitude of a Complex-valued Quantity. *Metrologia*, (1) **46** (2009) 81-86.

[24] Y. H. Wang, Fiducial Intervals: What are They? *Am. Stat.*, (2) **54** (2000) 105-111.