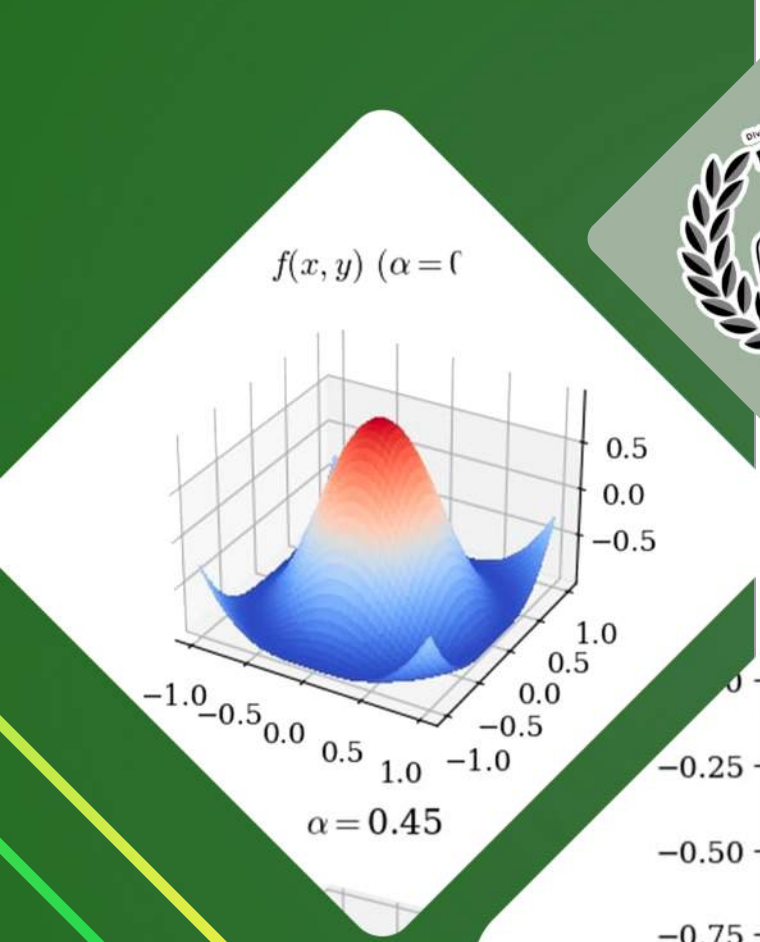
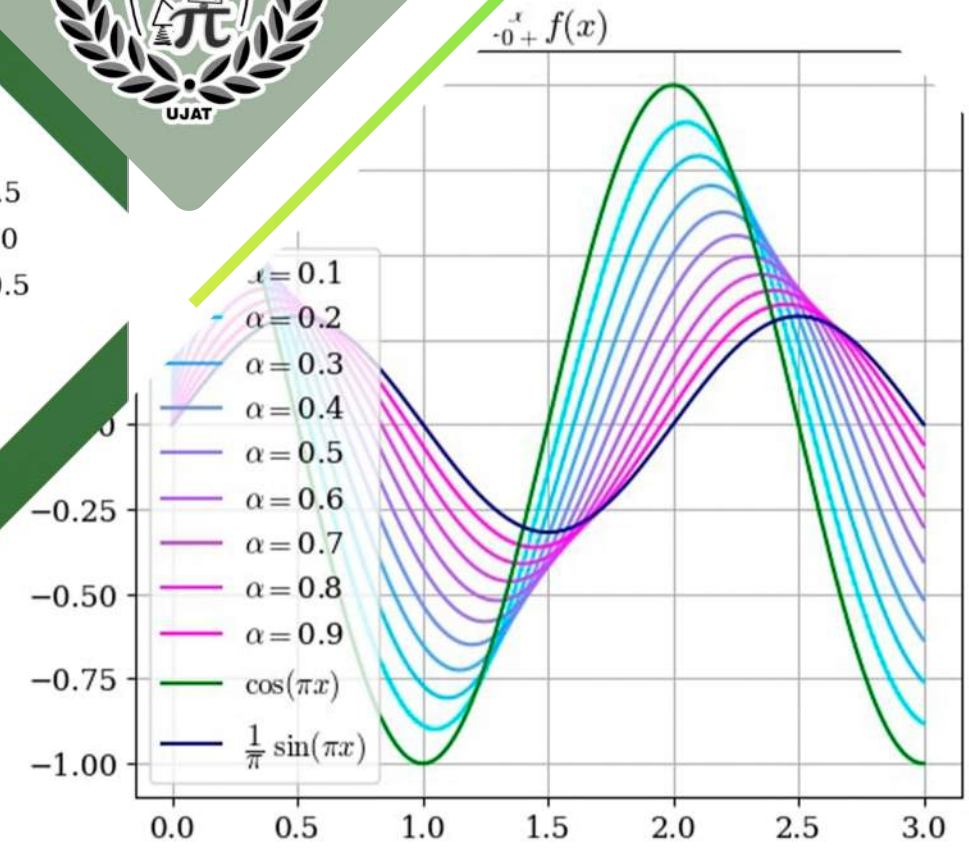
Volumen 11 número 30 enero-abril 2025

UJAT
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
"Estudio en la duda. Acción en la fe"

JOBS Journal of Basic Sciences

DACB • UJAT





ISSN:2448-4997
https://revistas.ujat.mx/index.php/jobs

OPEN ACCESS

CC BY NC ND

UJAT
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
"Estudio en la duda. Acción en la fe"

JOBS Journal of Basic Sciences
DACB UJAT

Con el número 30 del Journal of Basic Sciences, se inicia el volumen 11 de esta revista correspondiente al año 2025. El carácter multidisciplinario de esta revista, permite enriquecer su contenido con perspectivas variadas que abordan diversas problemáticas en el área de las ciencias básicas y disciplinas afines.

De esta forma, se presenta una contribución que desarrolló generalizaciones en cálculo multivariable para llegar a nuevas diferenciales totales fraccionarias, las cuales juegan un papel importante en la modelación de gran número de fenómenos. Por otro lado, se incluye también una aportación que trata sobre el desarrollo de un método para resolver la ecuación de transporte conservativa en dominios específicos, incluyendo su validación y prueba para demostrar sus capacidades.

Se incluye además, un reporte encaminado a mejorar la calidad de imágenes, mediante técnicas de discretización numérica presentando una evaluación cualitativa y cuantitativa de los resultados obtenidos. En otro orden de ideas, se centra la atención hacia el estudio de sistemas aleatorios y la complejidad en su modelación, mostrando un estudio inferencial para un proceso de Poisson mixto, que lleva a la obtención de expresiones para densidad predictiva.

Es innegable que el aprendizaje de las matemáticas representa un reto actual que no debe soslayarse. En este sentido, se incluye un estudio que muestra la relación entre el desarrollo de la memoria de trabajo y el aprendizaje de identidades trigonométricas por parte de jóvenes del nivel medio superior, mostrando los subcomponentes necesarios en el razonamiento para el aprendizaje de este tema. En otra contribución relativa a la matemática educativa, se presenta una propuesta para atender el aprendizaje de los polígonos por estudiantes de bachillerato, mediante una serie de actividades diseñadas ex profeso que permiten una mejora en la comprensión de la temática.

En un contexto diferente, está el estudio dirigido a evaluar la actividad antibacteriana de extractos de plantas del género Cecropia, de uso tradicional en el sureste mexicano, correlacionando esta propiedad con el perfil fitoquímico analizado. Se presenta además, una contribución encaminada a analizar el impacto, que en los últimos años, han ocasionado derrames petroleros en el sureste mexicano, con especial énfasis en la afectación a cultivos agrícolas.

La atención de problemas de salud está dada a través de dos artículos que forman parte de este número. Por un lado, se comparó la resistencia a la insulina a través de índices específicos en momentos anteriores y durante la pandemia de COVID-19; en otro aporte, se analiza la relación entre diversos factores de riesgo asociados a la población joven y la enfermedad de Chagas. Mientras que en el área de la ciencia de los materiales, se incluye una propuesta para la obtención de derivados de poliuretano, con un método eficiente y compacto.

De esta forma el Journal of Basic Sciences acerca a sus lectores al amplio panorama del quehacer científico.

DIRECTORIO INSTITUCIONAL

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

Lic. Guillermo Narváez Osorio.
Rector

Dr. Luis Manuel Hernández Govea.
Secretario de Servicios Académicos

Dr. Wilfrido Miguel Contreras Sánchez.
Secretario de Investigación, Posgrado y Vinculación

Dr. Pablo Marín Olán. Director de Difusión,
Divulgación Científica y Tecnológica

Directorio Divisional
División Académica de Ciencias Básicas

Dra. Hermicenda Pérez Vidal.
Directora

Dr. Luis Manuel Martínez González.
Coordinador de Investigación

M.C. Abel Cortazar May.
Coordinador de Docencia

L.Q. Esmeralda León Ramos.
Coordinador de Difusión Cultural y Extensión

ISSN:2448-4997
https://revistas.ujat.mx/index.php/jobs

CONSEJO EDITORIAL

- **Dr. Carlos Ernesto Lobato García**. Editor en Jefe. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, https://orcid.org/0000-0003-3734-7780
- **Dr. Adib Abiu Silahua Pavón**. Gestor Editorial. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, https://orcid.org/0000-0001-5344-1430

COMITÉ EDITORIAL

- **Mtra. Claudia Gisela Vázquez Cruz.** Editora Asociada. Actuaría. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, https://orcid.org/0009-0002-1791-5621
- **Mtra. María Hortensia Almaguer Cantú.** Editora Asociada. Ciencias de la Computación. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, https://orcid.org/0009-0007-7839-9014
- **Dr. José Arnold González Garrido**. Editor Asociado. Ciencias Farmacéuticas. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. https://orcid.org/0000-0003-1135-4050
- **Dr. José Luis Benítez Benítez.** Editor Asociado. Física. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. https://orcid.org/0009-0000-0561-5029
- **Mtro. Guillermo Chávez Hernández.** Editor Asociado. Geofísica. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, https://orcid.org/0000-0002-3555-9678
- **Dra. Addy Margarita Bolívar Cimé.** Editora Asociada. Matemáticas. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, https://orcid.org/0000-0002-7342-0888
- **Dra. Nancy Romero Ceronio.** Editora Asociada. Química. DACB, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, https://orcid.org/0000-0001-8169-3811

JOURNAL OF BASIC SCIENCES, Vol. 11, Núm. 30, abril de 2025, es una publicación continua cuatrimestral, editada por la División Académica de Ciencias Básicas de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Av. Universidad S/N, Zona de la Cultura, Col. Magisterial, C.P. 86040, Villahermosa Tabasco, México. Tel. (+52) (933) 358 1500 Ext. 5040. https://revistas.ujat.mx/index.php/jobs. Editor Responsable de la Revista: Carlos Ernesto Lobato García. Reserva de derechos al uso exclusivo 04-2015-052110084000-203, ISSN: 2448-4997, ambos otorgado por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Av. Universidad S/N, Zona de la Cultura, Col. Magisterial, Centro, Tabasco. C.P. 86040. Fecha de última actualización, 30 de enero de 2025.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación y de esta Casa Editora.

Las publicaciones respaldadas con el sello editorial de la UJAT no podrán utilizarse para entrenar modelos de lA generativa, a menos de que haya una declaración expresa, tanto de la Universidad como de los autores y/o herederos.

UJAT
UNIVERSIDAD JUÁREZ AUTÓNOMA DE TABASCO
"ESTUDIO EN LA DUDA. ACCIÓN EN LA FE"

CONTENIDO

	Pag.
On Riemann-Liouville Operators for Functions of One and Several Variables	1-15
An unstructured finite-volume method for the two-dimensional conservative transport equation	16-31
Impacto de la discretización numérica del modelo de variación total de eliminación de ruido	32-44
Inferencia bayesiana sobre el parámetro de intensidad de un proceso de Poisson mixto-gamma	45-59
Memoria de trabajo y desempeño en demostración de identidades trigonométricas: Un modelo de ecuaciones estructurales	60-68
La visualización en la construcción de polígonos regulares por estudiantes de educación Media Superior	69-83
Perfil químico del extracto hidroalcohólico de Cecropia spp y su actividad antimicrobiana	84-92
Afectaciones en cultivos de Veracruz y Tabasco por derrame de petróleo en los últimos seis años	93-105

ISSN:2448-4997
https://revistas.ujat.mx/index.php/jobs
OPEN ACCESS

Evaluación de la resistencia a la insulina mediante el índice TyG: comparación prepandemia y pandemia de COVID-19	**106-114**
Relationship between risk factors and prevalence of Chagas disease in young people in Tabasco, Mexico	**115-125**
Metodología eficiente y compacta para la síntesis de Poliuretanos y Poliuretano-ureas Segmentados	**126-135**

ISSN:2448-4997
https://revistas.ujat.mx/index.php/jobs

Vol. 11(30), p. 32–44, enero-abril 2025, e-ISSN: 2448-4997
JOURNAL OF BASIC SCIENCES

Impacto de la discretización numérica del modelo de variación total de eliminación de ruido.

Martinez-Ku, N.[1,*], **Legarda-Saenz, R.**[1], **Brito-Loeza, C.**[1]
[1] *CLIR - Computational Learning and Imaging Research, Facultad de Matemáticas - UADY.*
[*] *a19216379@ alumnos.uady.mx*

Resumen
En este trabajo, se comparan diferentes técnicas de discretización numérica, así como algoritmos de optimización para hallar la solución del modelo de variación total de eliminación de ruido propuesto por Rudin, Osher y Fatemi en 1992. De igual forma, se realiza un análisis cualitativo y cuantativo de los resultados obtenidos.
***Palabras claves**: Eliminación de ruido, modelo variacional, ecuaciones diferenciales parciales, optimización, procesamiento de imágenes.*

Abstract
In this manuscript, different numerical discretization techniques are compared, as well as optimization algorithms to find a solution to the total variation based model proposed for Rudin, Osher and Fatemi in 1992. In the same way, we made a qualitative and quantitative analysis of the obtained results.

***Keywords**:Image denoising, variational method, partial differential equations, optimization, image processing*

Recibido: 24 de octubre de 2024. Aceptado: 17 de marzo de 2025. Publicado: 30 de abril de 2025.

1. Introducción

A consecuencia de diversos factores, una imagen puede contarminarse con ruido, de manera inevitable, durante el proceso de captura, transmisión o compresión. Debido a esto, se requieren procesos que permitan mejorar la calidad de la imagen sin comprometer sus características principales. Por ello, la eliminación de ruido es uno de los principales problemas del procesamiento de imágenes y ha sido muy estudiado a lo largo de las últimas décadas, a pesar de ello, permanece como una tarea abierta.

Matemáticamente, este problema puede expresarse como sigue:

$$\hat{U}(x,y) = U(x,y) + \eta(x,y),$$

donde $\hat{U}(x,y)$ es la imagen ruidosa, $U(x,y)$ es la imagen libre de ruido y $\eta(x,y)$ representa el ruido aditivo Gaussiano con media μ y desviación estándar σ, el cual se desconoce. El principal objetivo del filtrado de ruido es reducir el error en las imágenes al restaurar las características originales de éstas como bordes, constrante e iluminación y mejorar la relación señal-ruido. Entre las principales dificultades de esta tarea se encuentra la preservación de bordes, texturas y componentes de altas frecuencias [16] que inevitablemente se pierden durante el proceso de filrado [10]. Cabe mencionar que el problema de eliminación o filtrado de ruido es un problema inverso y no tiene una solución única, por lo que también es un problema mal planteado.

1.1. Modelo variacional

Aunque existen diversos métodos para llevar acabo esta tarea, el empleo de modelos de variación total se justifican por su capacidad de preservar discontinuidades y componentes de alta frecuencia a diferencia de métodos clásicos [1, 2, 3, 4] que tienden a suavizar estas. En 1992, Rudin et al. [5] propusieron el siguiente método no lineal de variación total para la eliminación de ruido

$$\min_U \int_\Omega |\nabla U| \, d\Omega \qquad \text{sujeto a} \qquad \|U - \hat{U}\|^2 = \sigma^2 \text{ y } \|U - \hat{U}\| = 0, \tag{1}$$

donde Ω es una región convexa en un espacio 2-dimensional, $|\cdot|$ es la distancia euclidiana y $\|\cdot\|$ denota la norma en $L^1(\Omega)$. La idea detrás de este modelo es que las señales ruidosas tienen un gradiente más grande que aquellas sin ruido [7]. Por otro lado, la restricciones implican que el ruido η es de media μ cero y desviación estándar σ.

Es posible transformar este problema a un problema de minimización de variación total sin restricciones aplicando el método del multiplicadores de Lagrange [6] de la siguiente forma:

$$\min_U \left\{ \int_\Omega |\nabla U| d\Omega + \frac{\lambda}{2} \|U - \hat{U}\|^2 \right\}, \tag{2}$$

donde $\frac{\lambda}{2}$ es un parámetro que pondera la proporción entre el término regularizador y el de similitud. Entre las principales ventajas de este modelo es la existencia y unicidad de la solución [8, 16] y su poca dependencia a variaciones en el ruido, por lo que el problema se vuelve bien planteado.

Si definimos $\varphi \in C(\Omega)$ con soporte compacto y ε un escalar, la primera variación de la funcional (2) está dada por:

$$F(U) := \int_\Omega |\nabla U| d\Omega + \frac{\lambda}{2} \|U - \hat{U}\|^2,$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} F(U + \varepsilon\varphi)\big|_{\varepsilon=0} = 0,$$

tal que

$$\begin{aligned} \delta F &= \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \frac{\lambda}{2} \int_\Omega (U + \varepsilon\varphi - \hat{U})^2 d\Omega + \int_\Omega |\nabla(U + \varepsilon\varphi)| d\Omega \right\} \\ &= \frac{\lambda}{2} \int_\Omega 2\varphi(U + \varepsilon\varphi - \hat{U}) d\Omega + \int_\Omega \frac{\nabla(U + \varepsilon\varphi)}{|\nabla(U + \varepsilon\varphi)|} \cdot \nabla\varphi d\Omega, \end{aligned}$$

evaluando en $\varepsilon = 0$ y simplificando

$$\delta F = \lambda \int_\Omega \varphi(U - \hat{U}) d\Omega + \int_\Omega \frac{\nabla U}{|\nabla U|} \cdot \nabla\varphi d\Omega.$$

Si aplicamos el Teorema de Green al último término:

$$\int_\Omega \frac{\nabla U}{|\nabla U|} \cdot \nabla\varphi d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \left(\frac{\nabla U}{|\nabla U|} \cdot \mathbf{n} \right) \varphi d(\partial\Omega) - \int_\Omega \nabla \cdot \left(\frac{\nabla U}{|\nabla U|} \right) \varphi d\Omega,$$

obtenemos la siguiente ecuación diferencial parcial que denota el gradiente del funcional F descrito en (2)

$$\nabla F(U) = \lambda(U - \hat{U}) - \nabla \cdot \left(\frac{\nabla U}{|\nabla U|} \right) = 0 \qquad \text{en } \Omega, \tag{3}$$

con la condición de frontera de Neumann

$$\frac{\nabla U}{|\nabla U|} \cdot \mathbf{n} = 0 \qquad \text{en } \partial\Omega.$$

2. Metodología

En esta sección presentamos dos métodos de discretización para hallar la solución de la ecuación diferencial (3). Para ambos casos, la forma discreta de la ecuación diferencial se define por $u_{i,j} = U(x_i, y_i)$ que denota el valor de la función U en los puntos (x_i, y_i) dados en $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ tal que $x_i = a + \dfrac{i-1}{h_x}$ y $y_i = c + \dfrac{j-1}{h_y}$ con $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ y $h_x = \dfrac{b-a}{m-1}$, $h_y = \dfrac{b-a}{n-1}$.

2.1. Discretización por puntos centrales

Definimos los operadores

$$\delta_x u_{i,j} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{h_x} \quad y \quad \delta_y u_{i,j} = \frac{u_{i,j+\frac{1}{2}} - u_{i,j-\frac{1}{2}}}{h_y},$$

los cuales utilizamos para aproximar las derivadas en la ecuación (3) expresadas como sigue

$$\begin{aligned}
\nabla F(u_{i,j}) &= \lambda(u_{i,j} - \hat{u}_{i,j}) - (\delta_x, \delta_y) \cdot \frac{(\delta_x u_{i,j}, \delta_y u_{i,j})}{|(\delta_x u_{i,j}, \delta_y u_{i,j})|} \\
&= \lambda(u_{i,j} - \hat{u}_{i,j}) - \delta_x \frac{\delta_x u_{i,j}}{\sqrt{(\delta_x u_{i,j})^2 + (\delta_y u_{i,j})^2}} - \delta_y \frac{\delta_y u_{i,j}}{\sqrt{(\delta_x u_{i,j})^2 + (\delta_y u_{i,j})^2}} \\
&= \lambda(u_{i,j} - \hat{u}_{i,j}) - \frac{\left(\dfrac{\delta_x u_{i,j}}{\sqrt{(\delta_x u_{i,j})^2 + (\delta_y u_{i,j})^2}} \right)_{i+\frac{1}{2},j}}{h_x} \\
&+ \frac{\left(\dfrac{\delta_x u_{i,j}}{\sqrt{(\delta_x u_{i,j})^2 + (\delta_y u_{i,j})^2}} \right)_{i-\frac{1}{2},j}}{h_x} - \frac{\left(\dfrac{\delta_y u_{i,j}}{\sqrt{(\delta_x u_{i,j})^2 + (\delta_y u_{i,j})^2}} \right)_{i,j+\frac{1}{2}}}{h_y} \\
&+ \frac{\left(\dfrac{\delta_y u_{i,j}}{\sqrt{(\delta_x u_{i,j})^2 + (\delta_y u_{i,j})^2}} \right)_{i,j-\frac{1}{2}}}{h_y}
\end{aligned}$$

$$\nabla F(u_{i,j}) = \lambda(u_{i,j} - \hat{u}_{i,j}) - \frac{\delta_x u_{i+\frac{1}{2},j}}{h_x \sqrt{(\delta_x u_{i+\frac{1}{2},j})^2 + (\delta_y u_{i+\frac{1}{2},j})^2}}$$

$$+\frac{\delta_x u_{i-\frac{1}{2},j}}{h_x\sqrt{(\delta_x u_{i-\frac{1}{2},j})^2+(\delta_y u_{i-\frac{1}{2},j})^2}}-\frac{\delta_y u_{i,j+\frac{1}{2}}}{h_y\sqrt{(\delta_x u_{i,j+\frac{1}{2}})^2+(\delta_y u_{i,j+\frac{1}{2}})^2}}$$
$$+\frac{\delta_y u_{i,j-\frac{1}{2}}}{h_y\sqrt{(\delta_x u_{i,j-\frac{1}{2}})^2+(\delta_y u_{i,j-\frac{1}{2}})^2}}.$$

Finalmente, obtenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned}\nabla F(u_{i,j}) = \lambda(u_{i,j}-\hat{u}_{i,j}) &- \frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h_x^2\sqrt{(u_{i+1,j}-u_{i,j})^2/h_x^2+(u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}-u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}})^2/h_y^2+\beta}}\\ &+\frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h_x^2\sqrt{(u_{i,j}-u_{i-1,j})^2/h_x^2+(u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}-u_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}})^2/h_y^2+\beta}}\\ &-\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{h_y^2\sqrt{(u_{i,j+1}-u_{i,j})^2/h_y^2+(u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}-u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})^2/h_x^2+\beta}}\\ &+\frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{h_y^2\sqrt{(u_{i,j}-u_{i,j-1})^2/h_y^2+(u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}-u_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}})^2/h_x^2+\beta}},\end{aligned}$$

donde el parámetro positivo β se añade al denominador con el fin de evitar singularidades. Las condiciones de frontera descritas en [5] se implementan de la siguiente forma

$$u_{0,j}=u_{1,j},\quad u_{m,j}=u_{m-1,j},\quad u_{i,0}=u_{i,1}\quad u_{i,n}=u_{i,n-1}. \tag{4}$$

En los índices no enteros consideramos las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}-u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} &= \texttt{minmod}\left(\frac{1}{2}(u_{i+1,j+1}-u_{i+1,j-1}),\frac{1}{2}(u_{i,j+1}-u_{i,j-1})\right)\\ u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}-u_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} &= \texttt{minmod}\left(\frac{1}{2}(u_{i,j+1}-u_{i,j-1}),\frac{1}{2}(u_{i-1,j+1}-u_{i-1,j-1})\right)\\ u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}-u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} &= \texttt{minmod}\left(\frac{1}{2}(u_{i+1,j+1}-u_{i-1,j+1}),\frac{1}{2}(u_{i+1,j}-u_{i-1,j})\right)\\ u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}-u_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} &= \texttt{minmod}\left(\frac{1}{2}(u_{i+1,j}-u_{i-1,j}),\frac{1}{2}(u_{i+1,j-1}-u_{i-1,j-1})\right),\end{aligned}$$

donde `minmod`(x, y) se define por la función

$$\texttt{minmod}(x,y)=\frac{\text{sgn}(x)+\text{sgn}(y)}{2}\,\text{mín}(|x|,|y|).$$

2.2. Discretización por *forward-backward*

Sean los operadores $\delta_x^{\pm}$ y $\delta_y^{\pm}$ descritos como sigue

$$\delta_x^{\pm}u_{i,j}=\pm\frac{u_{i\pm1,j}-u_{i_,,j}}{h_x}\quad y\quad \delta_y^{\pm}u_{i,j}=\frac{u_{i,j\pm1}-u_{i,j}}{h_y},$$

podemos aproximar la ecuación (3) de la siguienta manera

$$\begin{aligned}
\nabla F(u_{i,j}) &= \lambda(u_{i,j} - \hat{u}_{i,j}) - (\delta_x^-, \delta_y^-) \cdot \frac{(\delta_x^+ u_{i,j}, \delta_y^+ u_{i,j})}{|(\delta_x^+ u_{i,j}, \delta_y^+ u_{i,j})|} \\
&= \lambda(u_{i,j} - \hat{u}_{i,j}) - \delta_x^- \frac{\delta_x^+ u_{i,j}}{\sqrt{(\delta_x^+ u_{i,j})^2 + (\delta_y^+ u_{i,j})^2}} - \delta_y^- \frac{\delta_y^+ u_{i,j}}{\sqrt{(\delta_x^+ u_{i,j})^2 + (\delta_y^+ u_{i,j})^2}} \\
&= \lambda(u_{i,j} - \hat{u}_{i,j}) + \frac{\left(\dfrac{\delta_x^+ u_{i,j}}{\sqrt{(\delta_x^+ u_{i,j})^2 + (\delta_y^+ u_{i,j})^2}} \right)_{i-1,j}}{h_x} \\
&- \frac{\left(\dfrac{\delta_x^+ u_{i,j}}{\sqrt{(\delta_x^+ u_{i,j})^2 + (\delta_y^+ u_{i,j})^2}} \right)_{i,j}}{h_x} + \frac{\left(\dfrac{\delta_y^+ u_{i,j}}{\sqrt{(\delta_x^+ u_{i,j})^2 + (\delta_y^+ u_{i,j})^2}} \right)_{i,j-1}}{h_y} \\
&+ \frac{\left(\dfrac{\delta_y^+ u_{i,j}}{\sqrt{(\delta_x^+ u_{i,j})^2 + (\delta_y^+ u_{i,j})^2}} \right)_{i,j}}{h_y}.
\end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos la siguiente discretización

$$\begin{aligned}
\nabla F(u_{i,j}) &= \lambda(u_{i,j} - \hat{u}_{i,j}) + \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_x^2 \sqrt{(u_{i,j} - u_{i-1,j})^2/h_x^2 + (u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j})^2/h_y^2 + \beta}} \\
&- \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x^2 \sqrt{(u_{i+1,j} - u_{i,j})^2/h_x^2 + (u_{i,j+1} - u_{i,j})^2/h_y^2 + \beta}} \\
&+ \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_y^2 \sqrt{(u_{i+1,j-1} - u_{i,j-1})^2/h_x^2 + (u_{i,j} - u_{i,j-1})^2/h_y^2 + \beta}} \\
&- \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_y^2 \sqrt{(u_{i+1,j} - u_{i,j})^2/h_x^2 + (u_{i,j+1} - u_{i,j})^2/h_y^2 + \beta}},
\end{aligned}$$

con las condiciones de frontera descritas en la expresión (4).

2.3. Algoritmos numéricos

Para hallar una aproximación numérica a la solución del modelo (2) utilizamos tres algoritmos numéricos cuyos esquemas básicos describimos a continuación.

2.3.1. Descenso Gradiente

El Descenso Gradiente es uno de los métodos de minimización más antiguos que existen para funciones no lineales. Debido a su simplicidad es uno de los algoritmos más utilizados en la teoría. No obstante, tiende a requerir muchas iteraciones por restricciones de estabilidad que limitan el tamaño de paso a valores muy pequeños por lo que es poco empleado. El esquema básico del método de Descenso Gradiente se presenta en el Algoritmo 1.

Algoritmo 1 Descenso gradiente

Dado un punto inicial u_0
Definir un tamaño de paso α
$k = 0$
while $\|u_k - u_{k-1}\|_\infty \geq \varepsilon\|u_k + \varepsilon\|_\infty$ and $k < k_{\text{máx}}$ **do**
    $u_k = u_{k-1} - \alpha\nabla F(u_{k-1})$
    $k = k + 1$
end while
return u_k

2.3.2. Nesterov Momentum

El método del Nesterov Momentum es una mejora del algoritmo de Descenso Gradiente, desarrollado por Yurii Nesterov, que propuso un algoritmo que mejora la velocidad de convergencia y precisión. El esquema básico se presenta en el Algoritmo 2.

Algoritmo 2 Nesterov momentum [11]

Dado un punto inicial u_0
$y_0 = u_0$
$t_0 = 1$
$k = 0$
while $\|u_k - u_{k-1}\|_\infty \geq \varepsilon\|u_k + \varepsilon\|_\infty$ and $k < k_{\text{máx}}$ **do**
    $y_k = u_{k-1} - \alpha\nabla F(u_{k-1})$
    $t_k = \frac{1+\sqrt{1+4t_k^2}}{2}$
    $u_k = y_k + \frac{t_{k-1}-1}{t_k}(y_k - y_{k+1})$
    $k = k + 1$
end while
return u_k

2.3.3. Punto Fijo

Finalmente, Vogel y Oman en 1996, propusieron un método de punto fijo llamado *Lagged diffusivity fixed point iteration* en [12], en donde demostraron una rápida convergencia en comparación con el Descenso Gradiente y métodos de Newton. La idea principal es tratar la no linealidad del problema al calcular el término variacional fijando la iteración previa u_k y resolver para u_{k+1}. El esquema de este método se describe a continuación en el Algoritmo 3.

2.4. Métricas para la evaluación del desempeño

Las métricas *Peak Signal to Noise Ratio*(PSNR) y *Structural Similarity Index Measure* (SSIM) han sido empleadas para evaluar el desempeño de la eliminación de ruido de los métodos numéricos de forma estándar [10, 14].

Definición 2.1. *Dada una imagen de referencia U de tamaño $m \times n$ y una imagen procesada $\hat{U}$*

Algoritmo 3 PUNTO FIJO [12]

Dado un punto inicial u_0
$k = 0$
while $\|u_k - u_{k-1}\|_\infty \geq \varepsilon \|u_k + \varepsilon\|_\infty$ and $k < k_{\text{máx}}$ **do**
    $\lambda u_0 = \left(\lambda - \nabla \cdot \dfrac{\nabla}{|\nabla u_k|}\right) u_{k+1}$
    $k = k + 1$
end while
return u_k

de las mismas dimensiones, definimos el Peak Signal to Noise Ratio PSNR como sigue

$$PSNR(U, \hat{U}) = 20 \log_{10} \left(\frac{\text{máx}(U)^2}{\frac{1}{mn}\|U - \hat{U}\|_2^2} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{\text{máx}(U)^2}{\frac{1}{mn} \sum_{x=0}^{m-1} \sum_{y=0}^{n-1} (U(x,y) - \hat{U}(x,y))^2} \right).$$

Se expresa en decibelios y mide la relación entre el valor máximo posible de una señal y el valor del ruido que corrompe la señal y afecta la fidelidad de su representación.

Mientras mayor sea el valor del PSNR significa que la señal, en este caso la imagen, se encuentra más libre de ruido y se asocia a una reconstrucción de mayor calidad, por otro lado, un bajo valor puede interpretarse como una señal contaminada por ruido.

Por otra parte, el SSIM es una métrica publicada por primera vez en [14] construida a partir de tres factores importantes, estos son la luminosidad, el contraste y la estructura de una imagen con el objetivo de adaptarse mejor al funcionamiento del sistema visual humano.

Definición 2.2. *Dada una imagen de referencia U de tamaño $m \times n$ y una imagen procesada $\hat{U}$ de las mismas dimensiones, definimos el Structural Similarity Index Measure $SSIM$.*

$$SSIM(U, \hat{U}) = \frac{(2\mu_U \mu_{\hat{U}} + C_1)(2\sigma_{U\hat{U}} + C_2)}{(\mu_U^2 + \mu_{\hat{U}}^2 + C_1)(\sigma_U^2 + \sigma_{\hat{U}}^2 + C_2)},$$

donde μ_U, $\mu_{\hat{U}}$, σ_U y $\sigma_{\hat{U}}$ son la media y varianza de U y $\hat{U}$, respectivamente, $\sigma_{U\hat{U}}$ es la covarianza entre ambas imágenes y C_1 y C_2 constantes utilizadas para evitar inestabilidad.

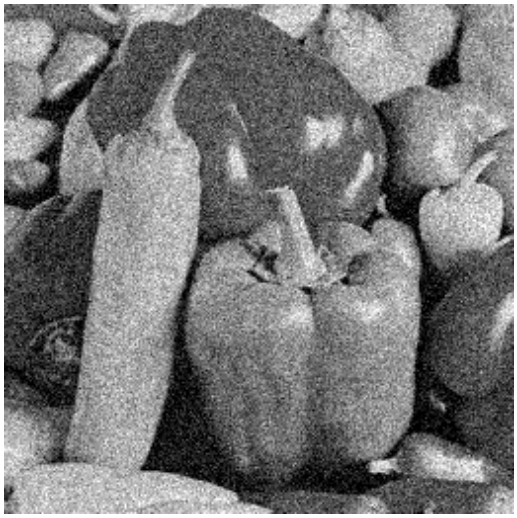
Los valores que pueden obtenerse con esta métrica se encuentran en el rango $[-1, 1]$, donde 1 indica una similitud perfecta, 0 que no hay similitud y -1 una correlación negativa perfecta. Sin embargo, estos últimos se consideran raros e irrelevantes [15]. Para la experimentación utilizamos los valores $C_1 = 0.01$ y $C_2 = 0.03$.

3. Experimentos numéricos

Todos los algoritmos de la sección anterior fueron ejecutados en una computadora con Pop-Os! Linux como sistema operativo, un procesador Ryzen 5 5600H y 32 GB de RAM. La implementación de las discretizaciones y los algoritmos propuestos fueron hechos en el lenguaje de programación Julia [13].

Para analizar las soluciones obtenidas, probamos una imagen de dimensiones 256×256 con valores en el rango $[0, 1]$ contaminada con ruido aditivo Gaussiano de media $\mu = 0$ y desviación estándar $\sigma = 0.1$ con PSNR $= 39.061$ dB y SSIM $= 0.344$, mostrada en la Figura 1b. Los parámetros utilizados fueron $\lambda = 10$, $\beta = 10^{-3}$ y para los casos que era requerido un tamaño de paso α como el Descenso Gradiente y el Nesterov Momentum, se usaron 0.001 y 0.005, respectivamente.

(a) Imagen libre de ruido.



(b) Imagen con ruido aditivo de $\sigma = 0.1$.

Figura 1: Comparativa entre imagen original y la contaminada con ruido.

Las soluciones obtenidas con los distintos algoritmos y discretizaciones se presentan en la Figura 2. En particular, se puede apreciar que todos los resultados son visualmente aceptables, pues los bordes se han preservado y el ruido se ha reducido de manera significativa.

En la Figura 3 se hace una comparativa de la iteraciones necesarias para alcanzar el criterio de paro $\|u_k - u_{k-1}\|_\infty \leq \varepsilon \|u_k + \varepsilon\|_\infty$ con $\varepsilon = 10^{-9}$. Tal como se esperaba, el punto fijo propuesto resultó ser superior en el rendimiento, lo cual es consistente con lo descrito en [12].

En la Tabla 1 se muestra una comparativa de las métricas obtenidas por cada método numérico y discretización, en general, podemos notar una ligera mejoría en el PSNR y SSIM de las soluciones obtenidas discretizando con puntos centrales. Además, se observa que los valores permanecen iguales en cada método, de lo cual se infiere que la calidad de los resultados no depende del algoritmo numérico para hallar la solución de la ecuación diferencial, sino de la discretización empleada.

Tabla 1: Comparación de métricas de las soluciones obtenidas.

Método numérico	**Discretización**	**PSNR**	**SSIM**
Descenso Gradiente	Puntos centrales	55.93	0.809
	Forward-Backward	55.88	0.804
Nesterov	Puntos centrales	55.93	0.809
	Forward-Backward	55.88	0.804
Punto fijo	Puntos centrales	55.93	0.809
	Forward-Backward	55.88	0.804

(a) Descenso gradiente con Forward-Backward.

(b) Descenso Gradiente con puntos centrales.

(c) Nesterov Momentum con Forward-Backward.

(d) Nesterov Momentum con puntos centrales.

(e) Punto fijo con Forward-Backward.

(f) Punto fijo con puntos centrales.

Figura 2: Resultados obtenidos. En la columna izquierda los algoritmos con la discretización Forward-Backward y en la derecha con puntos centrales.

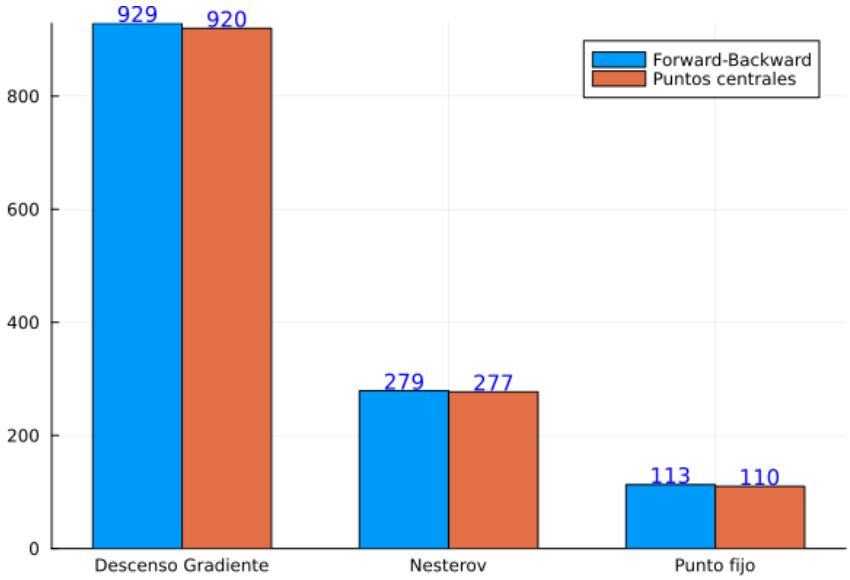


Figura 3: Iteraciones necesarias para alcanzar el criterio de paro.

Los experimentos mostrados hasta ahora sugieren que no existe una diferencia significativa entre una discretización u otra pues la variación que existe entre los resultados pudiera parecer mínima, por ello, se realiza una comparación del comportamiento de las métricas ante la presencia de un ruido aditivo Gaussiano con mayor desviación estándar σ.

Para fines de justa comparación empleamos los mismo valores para todos los parámetros e hicimos variar σ entre el intervalo $[0.05, 0.4]$.

En la figura 4 se muestra la comparación del compartamiento de las métricas ante la presencia de mayor ruido. En ella observamos que cuando el ruido tiene valores de σ entre 0 y 0.1 no hay gran diferencia entre usar Forward-Backward o puntos centrales, lo que sugiere que no es muy relevante para la calidad de los resultados. Por el contrario, a medida que es mayor la presencia de ruido existe ventaja de utilizar puntos centrales como discretización del término variacional sobre Forward-Backward, pues utilizando PSNR como métrica de evaluación del desempeño de la eliminación de ruido puede alcanzar una diferencia de hasta 2 dB, mientras que el caso del SSIM de 0.03, lo cual representa una mejoría pues la diferencia es mayor a 10^{-4} como se ha sugerido en [15] para que sea significativo.

4. Conclusiones

En este artículo se presentó una comparativa de dos discretizaciones comúnmente empleadas en la solución numérica de un modelo de variación total para la eliminación de ruido en imágenes. Estas discretizaciones fueron capaces de preservar bordes y reducir el ruido de manera aceptable tal como se estimaba para el modelo. Además, como método de comparación, se dieron métricas para la evaluación de su desempeño en tres algoritmos numéricos habitualmente utilizados para hallar la solución numérica de ecuaciones diferenciales no lineales. Siendo así, podemos concluir que la discretización por puntos centrales resultó ser superior de acuerdo a los valores de PSNR y SSIM, independientemente de la desviación estándar σ que tuviera el ruido aditivo Gaussiano. Cabe mencionar, que esta ventaja se preserva aún ante la presencia de altos niveles de ruido utilizando

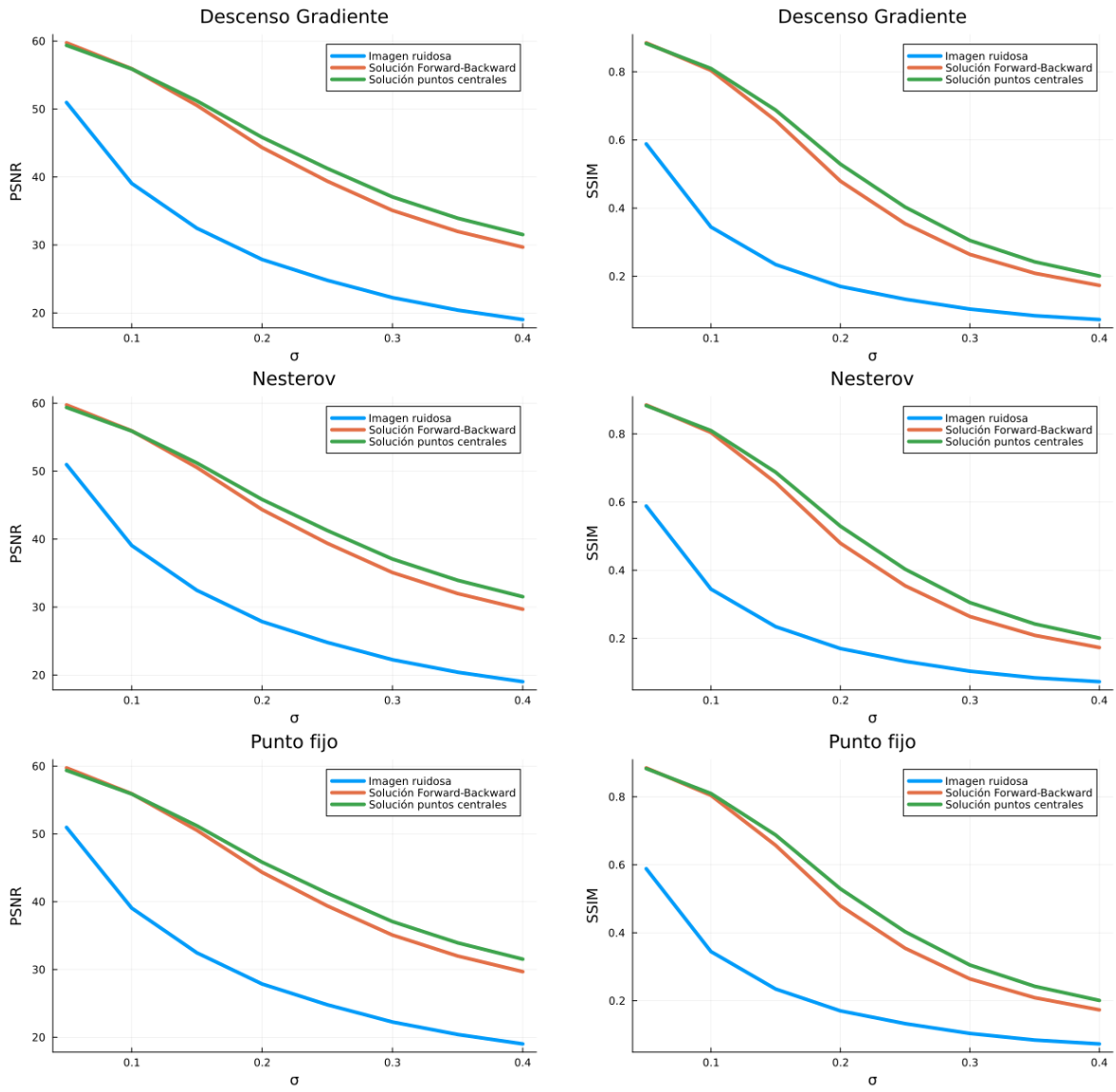


Figura 4: Comparación del comportamiento de las métricas ante la presencia de mayor ruido. En la columna izquierda el comportamiento del PSNR y en la derecha del SSIM.

valores del parámetro λ adecuados para ello.

5. Agradecimientos

Martinez-Ku le agradece al CONAHCYT el apoyo otorgado a través de la Beca para Estudios de Maestría # 1287720.

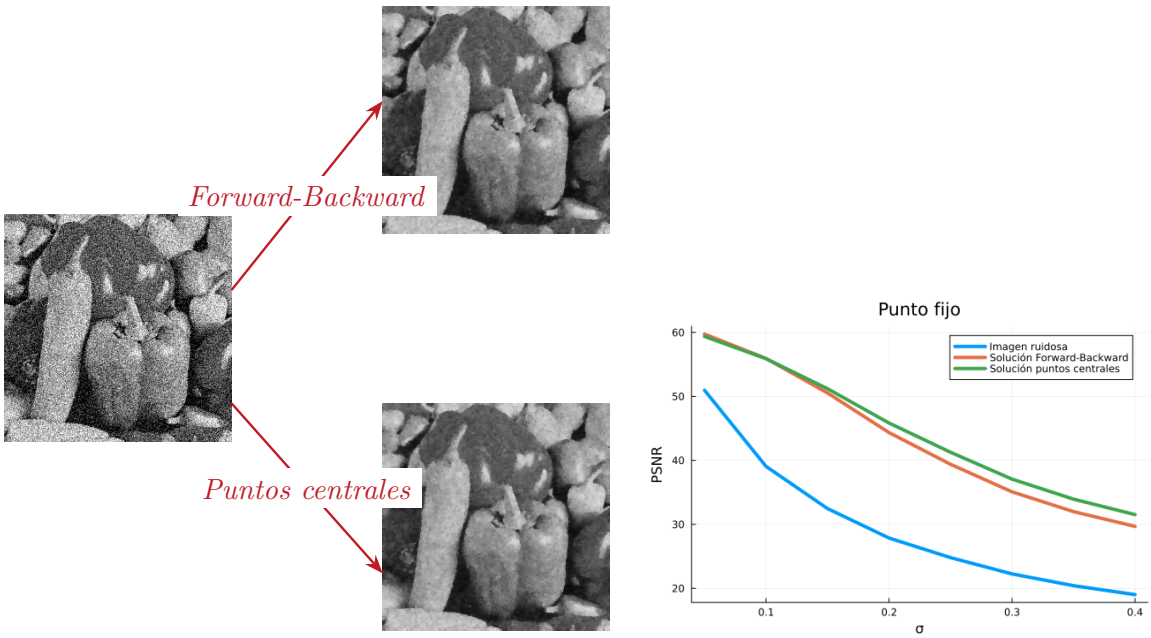
6. Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener conflictos de intereses.

7. Declaratoria de uso de Inteligencia Artificial.

Los autores declaran que no han utilizado ninguna aplicación, software, páginas web de inteligencia artificial generativa en la redacción del manuscrito, en el diseño de tablas y figuras, ni en el análisis e interpretación de los datos.

8. Resumen gráfico



Referencias

[1] Jin, Cong, and Luan, Ningli. “An image denoising iterative approach based on total variation and weighting function”. *Multimedia Tools and Applications* 79.29 (2020): 20947–20971.

[2] Caselles, Vicent, Chambolle, Antonin, Novaga, Matteo, and others. “Total Variation in Imaging.”. *Handbook of mathematical methods in imaging* 1.2 (2015): 3.

[3] Tang, Liming, and Fang, Zhuang. "Edge and contrast preserving in total variation image denoising". *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing* 2016. (2016): 1–21.

[4] Strong, David, and Chan, Tony. "Edge-preserving and scale-dependent properties of total variation regularization". *Inverse problems* 19.6 (2003): S165.

[5] Rudin, Leonid I, Osher, Stanley, and Fatemi, Emad. "Nonlinear total variation based noise removal algorithms". *Physica D: nonlinear phenomena* 60.1-4 (1992): 259–268.

[6] Chan, Tony F, Zhou, Hao Min, and Chan, Raymond Hon-fu. *Continuation method for total variation denoising problems*. Vol. 2563.

[7] Saxena, Chandrika, and Kourav, Deepak. "Noises and image denoising techniques: A brief survey". *International journal of Emerging Technology and advanced Engineering* 4.3 (2014): 878–885.

[8] Chambolle, Antonin, and Lions, Pierre-Louis. "Image recovery via total variation minimization and related problems". *Numerische Mathematik* 76. (1997): 167–188.

[9] Ivan May-Cen, Ricardo Legarda-Saenz, and Carlos Brito-Loeza . "A Variational Model for Wrapped Phase Denoising". *Mathematics* 12. (2023).

[10] Fan, Linwei, Zhang, Fan, Fan, Hui, and Zhang, Caiming. "Brief review of image denoising techniques". *Visual Computing for Industry, Biomedicine, and Art* 2.1 (2019): 7.

[11] Kim, Donghwan, and Fessler, Jeffrey A. "Optimized first-order methods for smooth convex minimization". *Mathematical programming* 159. (2016): 81–107.

[12] Vogel, Curtis R, and Oman, Mary E. Ïterative methods for total variation denoising". *SIAM Journal on Scientific Computing* 17.1 (1996): 227–238.

[13] Bezanson, Jeff, Edelman, Alan, Karpinski, Stefan, and Shah, Viral B. "Julia: A fresh approach to numerical computing". *SIAM Review* 59.1 (2017): 65–98.

[14] Wang, Z. Bovik, A.C. Sheikh, H.R. and Simoncelli, E.P. "Image Quality Assessment: From Error Visibility to Structural Similarity". *IEEE Transactions on Image Processing* 13.4 (2004): 600–612.

[15] Setiadi, De Rosal Igantius Moses. "PSNR vs SSIM: imperceptibility quality assessment for image steganography". *Multimedia Tools and Applications* 80.6 (2020): 8423–8444.

[16] Vese, L.A. and Guyader, C.L. *Variational Methods in Image Processing*. CRC Press.