Introducción a los sistemas lineales sobre superficies de Riemann compactas

Abel Castorena [*]
Instituto de Matemáticas, UNAM, Campus Morelia.
Apdo. Postal 61-3(Xangari) C.P. 58089
Morelia, Michoacán. México.

El propósito de estas notas es dar una muy breve exposición demostrando solo algunos resultados de un tema clásico de la geometría algebraica: superficies de Riemann compactas, sistemas lineales y curvas algebráicas.

The main goal of these short notes is to give some results on compact Riemann surfaces to stablish the Riemann-Hurwitz formula. Also we discuss some facts on divisors, linear systems and Brill-Noether theory for special divisors on algebraic curves.

Palabras clave: Geometría Algebraica, Superficies de Riemann.
Keywords: Algebraic Geometry, Compact Riemann Surface.

1. Introducción

En los cursos de variable compleja de licenciatura, el tema central es el estudio de las funciones holomorfas (o funciones analíticas) y las funciones meromorfas. Las primeras tienen en cada punto de su dominio una expansión en serie de Taylor. Ejemplos de funciones holomorfas son los polinomios complejos de la forma $c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+a_nz^n$, las funciones trigonometricas $\sin z, \cos z$ ó la exponencial e^z.

Si $U=\mathbb{C}-\{0\}$, la función $f:U\to\mathbb{C}$ definida por $f(z)=\frac{1}{z}$ es holomorfa en U. Podemos ver que esta función presenta un problema en el origen que NO pertenece al dominio de f. Nos gustaría extender esta función al origen, y la manera más natural es definiendo $f(0):=\infty$. La función f es un ejemplo de lo que se llama función *meromorfa*. Las funciones meromorfas tienen expansión en serie de Laurent y tal expansión nos da información sobre la naturaleza de los puntos donde no estan definidas tales funciones. Estas son muy importantes en el estudio de las superficies de Riemann compactas ya que por medio de ellas podemos estudiar ciertos objetos llamados divisores los cuales en la teoría de sistemas lineales son muy importantes.

Uno de los objetivos principales de estas notas es exponer de forma breve el tema de divisores y ver como estos nos dan información sobre el tipo de funciones meromorfas que existen sobre las superficies de Riemann compactas, así como su relación con las curvas algebráicas mediante la teoría de sistemas lineales.

1.1 Ejemplos de superficies de Riemann.

Para el estudio de superficies de Riemann debemos introducir el concepto de variedad compleja. Para ello, veamos el concepto de variedad diferenciable real.

[*]abel@matmor.unam.mx

1.- Sea M un espacio topológico Hausdorff. Una carta n-dimensional sobre M es un homeomorfismo $\phi : U \to V$, donde $U \subset M$ es abierto y V es un abierto de $\mathbb{R}^n$. Dos cartas $\phi_1 : U_1 \to V_1, \phi_2 : U_2 \to V_2$ se dicen $\mathcal{C}^\infty$ compatibles si la aplicación:

$$\phi_{21} := \phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \to \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

es un difeomorfismo $\mathcal{C}^\infty$, es decir ϕ_{21} y su inversa tienen derivadas parciales de todos los ordenes en cada punto de su dominio.

2.- Un atlas $\mathcal{C}^\infty$ es una colección de cartas $\{\phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha\}$ donde $M = \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$ y para cualquier par de indices α, β tal que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, se tiene que $\phi_{\beta\alpha} := \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ es compatible. Decimos que dos atlas sobre M son equivalentes si su unión es un atlas.

3.- Una estructura $\mathcal{C}^\infty$ sobre M es una clase de equivalencia de atlas. Una *variedad diferenciable real $\mathcal{C}^\infty$ de dimensión n* es un espacio Hausdorff segundo numerable conexo M con una estructura $\mathcal{C}^\infty$ cuyas cartas son homeomorfismos a conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$. Decimos que M es compacta si, M como espacio topológico es compacto. M es orientable si, para cualquier α, β, el determinante de la derivada de $\phi_{\beta\alpha}$ es mayor que cero en cada punto $p \in U_\alpha \cap U_\beta$.

De la definición de variedad diferenciable podemos ver que $\mathbb{R}^n$ con la función identidad es una variedad diferenciable(orientable) y además cada abierto de $\mathbb{R}^n$ es variedad diferenciable.

Sea M una variedad diferenciable compacta de dimensión dos. Una triangulación de M es una descomposición de M por conjuntos cerrados $\triangle_M = \{T_\alpha\}$, donde cada T_α es homeomorfo a un triángulo de $\mathbb{R}^2$, tal que cualesquiera dos triángulos o bien son disjuntos; se intersectan en un vértice ó a lo largo de una arista. Si denotamos por $v = \#$vertices, $e = \#$aristas y $t = \#$triangulos de la triangulación, la característica de Euler de M con respecto a la triangulación $\triangle_M$, es el entero $e(M) := v - e + t$. El número $e(M)$ no depende de la triangulación. ([4], p.50).

Un teorema de clasificación afirma que toda superficie M compacta orientable y sin frontera es homeomorfa a una esfera con $g-$asas ([4], p.6). El número g se llama el género de M, el cual resulta ser un invariante topológico.

Proposición.- Sea C una variedad diferenciable de dimensión dos, orientable, compacta y sin frontera de género g. Entonces $e(C) = 2 - 2g$.

Una demostración de este hecho se encuentra en *Ver [4], p.51*

Ejercicio 1.-. Demuestra que un abierto de una variedad diferenciable, es variedad diferencible.

Ejercicio 2.- Demostrar que $\mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ es una variedad diferenciable de dimensión dos.

Definición. Decimos que una variedad diferenciable M es una **variedad compleja de dimensión** n si admite una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ y cartas coordenadas $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n$ tal que $\phi_{\beta\alpha} := \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ es un biholomorfismo, es decir, $\phi_{\beta\alpha}$ y su inversa son funciones holomorfas en cada variable $z_1, ..., z_n$ de $\mathbb{C}^n$ y el determinante jacobiano de $\phi_{\beta\alpha}$ es distinto de cero en todos los puntos $p \in \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$.

Una variedad compleja C de dimensión uno se llama **Superficie de Riemann**. Si C es compacta como espacio topológico, diremos que C es un superficie de Riemann compacta.

Ejercicio 3.- Utiliza las Ecuaciones de Cauchy-Riemann para demostrar que toda superficie de Riemann es orientable.

Si M es variedad compleja y $U_0 \subset M$ abierto. Decimos que una función $f : U_0 \to \mathbb{C}^n$ es holomorfa si para toda carta compleja $\phi : U \to \mathbb{C}^n$, $f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap U_0) \subseteq \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ es holomorfa, es decir, localmente $f \circ \phi^{-1}(z_1, ..., z_n) = (f_1(z_1, ..., z_n), ..., f_n(z_1, ..., z_n))$, donde cada f_j es holomorfa en cada variable $z_1, ..., z_n$. Una función $f : M \to N$ entre variedades complejas M y N es holomorfa, si en coordenadas holomorfas viene dada por funciones holomorfas.

Para nuestro estudio de los sistemas lineales es necesario introducir una variedad compleja donde estan definidos los objetos geométricos que se estudian en geometría algebráica. Esta variedad se construye de la siguiente manera:

Consideramos el producto cartesiano de $\mathbb{C}$ $n+1$ veces, y tomamos $V := \mathbb{C}^{n+1} - \{(0, 0, \ldots, 0)\}$. Decimos que dos vectores $Z, W \in V$ son equivalentes, $Z \sim W$, si existe un número complejo $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $Z = \lambda W$. El lector puede ver que ésta es un relación de equivalencia y por lo tanto podemos tomar la clase $[Z] := \{W \in V : W \sim Z\}$.

Definición. El espacio proyectivo complejo n-dimensional es el conjunto definido como $\mathbb{CP}^n : \{[Z] : Z \in V\}$. Si $Z = (z_0, \ldots, z_n)$ son las coordenadas afines de Z, escribimos $[Z] = [z_0 : z_1 : \cdots : z_n]$ las cuales las llamamos coordenadas proyectivas de Z.

Es fácil ver que la proyección $\pi : V \to \mathbb{CP}^n = V/\sim$, dada por $\pi(Z) = [Z]$ es una función bien definida y al considerar la topología cociente, π es una función continua y sobreyectiva. Por lo tanto $\mathbb{CP}^n$ es conexo. Notemos que los subconjuntos $U_k := \{[z_0 : \cdots : z_k \cdots z_n] | z_k \neq 0\}$ son abiertos en $\mathbb{CP}^n$, y para $k = 0, 1, ..., n$, estos cubren a $\mathbb{CP}^n$.

Si tomamos las funciones $\phi_k : U_k \to \mathbb{C}^n$ definidas por

$$\phi_k([z_0 : \cdots : z_n]) = (\frac{z_0}{z_k}, ..., \frac{z_{k-1}}{z_k}, \frac{z_{k+1}}{z_k}, ..., \frac{z_n}{z_k}),$$

tenemos que $\{(\phi_k, U_k)\}$ forman un sistema de cartas coordenadas que le dan estructura de variedad compleja a $\mathbb{CP}^n$ (demostrar esta afirmación !).

Nota: De manera analoga a $\mathbb{C}^{n+1}$, se puede proyectivizar cualquier espacio vectorial complejo de dimensión finita, es decir, si V es un espacio vectorial complejo de dimensión finita $n+1$, se define $\mathbb{P}(V)$ de forma analoga a $\mathbb{CP}^n$. De hecho existe una identificació'n natural $\mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{CP}^n$

Ejercicio 4-. Prueba que $\mathbb{CP}^n$ es compacto.

Mediante la aplicación $\phi : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{S}^2$, $\phi([z:w]) = \frac{(2\mathrm{Re}(z\overline{w}), 2\mathrm{Im}(z\overline{w})|z|^2-|w|^2)}{(|z|^2+|w|^2)}$, se tiene que estas dos variedades son difeomorfas, por tanto $\mathbb{CP}^1$ tiene género cero, ya que $\mathbb{S}^2$ tiene 0-asas. $\mathbb{S}^2$ tiene una estructura compleja dada de la siguiente forma:

Sea $N = (0,0,1), S = (0,0,-1)$ "el polo norte y sur " respectivamente de $\mathbb{S}^2$. Sean $U_1 = \mathbb{S}^2 - N, U_2 = \mathbb{S}^2 - S$. Notemos que estos abiertos cubren la esfera. Consideremos la proyección estereografica desde el polo norte $\phi_N : U_1 \to \mathbb{C}$ definida como sigue: Sea $P = (X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3$ un punto sobre la esfera. Proyectamos la esfera sobre el plano XY que contiene su ecuador. Aqui identificamos $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ con el plano XY cuyos puntos son de la forma $(x,y,0)$. La línea que conecta a N y P intersecta un punto P' sobre el ecuador. P' es la proyección de P y tiene coordenadas de la forma $(x,y,0)$.

La ecuacion de un plano en $\mathbb{R}^3$ es de la forma $aX + bY + cZ + d = 0$. De manera que si N, P y P' estan sobre una línea, implica que existe un $t \neq 0$ tal que $(X,Y,Z-1) = t(x,y,-1)$ con $X = tx, Y = ty, 1-Z = t$. La proyección estereografica viene dada por $\phi_N(X,Y,Z) = (\frac{X}{1-Z}, \frac{Y}{1-Z})$. ϕ_N tiene inversa $\phi_N^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{S}^2 - N$, dada como sigue: Sea $w = x + iy = (x,y,0) \in \mathbb{C}$, entonces $\phi_N^{-1}(w) =$ punto de intersección de la recta que pasa por el punto $q = (x,y,0)$ y N con la esfera.

La carta $\psi : U_2 \to \mathbb{C}$ esta dada por $\psi(p) = \frac{1}{\phi_N(p)}$ si $p \neq N$ y $\psi(p) = 0$ si $p = N$. Como $p \neq S$, entonces $\phi_N(p) \neq 0$, por lo tanto ψ esta bien definida, es biyectiva. Un ejercicio para el lector es ver que ψ es un homeomorfismo. Si consideremos el cambio de coordenadas $f := \psi \circ \phi_N^{-1} : \phi_N(U_1 \cap U_2) \to \psi(U_1 \cap U_2)$, donde $U_1 \cap U_2 = \mathbb{S}^2 - \{N,S\}$, notamos que $\phi_N(U_1 \cap U_2) = \psi(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C} - \{0\}$, así que para toda $\zeta \in \mathbb{C} - \{0\}$, $f(\zeta) = \frac{1}{\zeta}$ es holomorfa.

Ejercicio 5. La esfera de Riemann: Sea $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Definimos una topología de este conjunto tomando como conjuntos abiertos de $\mathbb{C}_\infty$ los abiertos usuales de $\mathbb{C}$ y como vecindades del ∞ los conjuntos $U_\infty := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \cup \{\infty\}$. Demuestra que $\mathbb{C}_\infty$ es un espacio Hausdorff, conexo y que es homeomorfo a $\mathbb{S}^2$. Usa la proyección estereografica para darle una estructura compleja a $\mathbb{C}_\infty$. A $\mathbb{C}_\infty$ se le llama la esfere de Riemann.

Ejemplo: El toro complejo.

Sean v_1, v_2 dos números complejos linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Esto implica que $v_i \neq 0$ y $\frac{v_1}{v_2} \notin \mathbb{R}$. Definimos la retícula $\Lambda := \{av_1 + bv_2 | a, b \in \mathbb{Z}\} := \mathbb{Z}v_1 + \mathbb{Z}v_2 \subseteq \mathbb{C}$. Λ es un subgrupo discreto de $\mathbb{C}$ de rango máximo. Consideremos el grupo cociente $T := \mathbb{C}/\Lambda$ y la proyección al cociente $\pi : \mathbb{C} \to T$. A T le damos la topológia cociente, es decir, decimos que $U \subseteq T$ es abierto si y solo si $\pi^{-1}(U)$ es abierto en $\mathbb{C}$. Con esta topología π es continua y se tiene que T es un espacio Hausdorff conexo. Además, al considerar el conjunto $\mathcal{P} := \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 | \alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]\} \subseteq \mathbb{C}$, resulta que $\pi(\mathcal{P}) = T$ y por tanto T es compacto. El lector puede ver que π es una función abierta, es decir, si $U \subseteq \mathbb{C}$ es abierta, entonces $\pi(U)$ es abierta.

Sea $\mathbb{S}^1$ es el disco unitario de $\mathbb{R}^2$. Definimos la siguiente aplicación $G : T \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, dada por $G([av_1 + bv_2]) = (e^{(2\pi ia)}, e^{(2\pi ib)})$. Si $av_1 + bv_2 \sim cv_1 + d_2v_2$, entonces $a-c, b-d \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto $e^{(2\pi i(a-c))} = 1 = e^{(2\pi i(b-d))}$. Esto prueba que G esta bien definida. Resulta ser que G es un homeomorfismo, y como topologicamente $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es la esfera $\mathbb{S}^2$ con 1-asa, esto implica que el género de T es uno. Una estructura compleja sobre

T viene dada de la siguiente manera: Como Λ es un subgrupo discreto de $\mathbb{C}$, existe un $\epsilon > 0$ tal que $|\tau| > 2\epsilon$ para cada $\tau \in \Lambda$. Dado un número $z_\alpha \in \mathbb{C}$, consideremos el disco abierto $D_\alpha := D(z_\alpha, \epsilon)$. Por la elección de ϵ, notemos que para $x, y \in D_\alpha$, $x - y \notin \Lambda$. Esto nos permite ver que la restricción $\pi_\alpha := \pi|_{D_\alpha} : D_\alpha \to U_\alpha := \pi(D_\alpha)$ es inyectiva. Se tiene que π_α es un homeomorfismo(demostrarlo !) y se puede ver que $\phi_\alpha := \pi_\alpha^{-1} : U_\alpha \to D_\alpha$ es una carta compleja de T.

Ejercicio 6.- . Prueba que cualesquiera dos cartas ϕ_α, ϕ_β definidas de la forma anterior sobre T son compatibles, es decir, prueba que T es una superficie de Riemann.

En $\mathbb{CP}^n$ estan definidas de manera natural ciertos subconjuntos dados como ceros de polinomios homogéneos. Tales subconjuntos se les llama variedades proyectivas o variedades algebraicas. Estas variedades tienen una topología natural inducida por $\mathbb{C}^{n+1}$.

Un ejemplo de este tipo de variedades es cuando consideramos un polinomio homogeneo F irreducible de grado m sobre $\mathbb{C}^{n+1}$, es decir, $F : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ es un polinomio de grado m en las variables $z_0, ..., z_n$ tal que $F(\lambda z_0, ..., \lambda z_n) = \lambda^m F(z_0, ..., z_n)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$. Notemos que si $(z_0, ..., z_n) \neq (0, ..., 0)$ es un cero de F, es decir, $F(z_0, ..., z_n) = 0$, entonces también se tiene que $F(\lambda z_0, ..., \lambda z_n) = 0$.

Esto nos permite definir en $\mathbb{CP}^n$ una aplicación que denotaremos por F, dada por $F[Z] = 0$ si $F(Z) = 0$ y $F([Z]) = 1$ si $F(Z) \neq 0$. El conjunto $Y := \{[Z] \in \mathbb{CP}^n : F(Z) = 0\}$ esta bien definido y se llama hypersuperficie de grado m.

Si F es un polinomio no singular, es decir, $\frac{\partial F}{\partial z_j}(Z) \neq 0$ para toda j y toda $Z \neq (0, 0, ..., 0)$ decimos que Y es no singular o lisa. En caso contrario decimos que Y es singular.

Ejercicio 7.- Si Y es no singular dar un sistema de cartas complejas para Y y demuestra que la dimensión de Y es $n - 1$. (Aqui hay que hacer uso del teorema de la función implícita).

Definición. Una *curva algebraica* X es un subconjunto cerrado y conexo de $\mathbb{CP}^N$ dado como el conjunto de ceros de polinomios homogéneos $F_1, , , , F_{N-1}$ en una vecindad de cada punto $p \in X$. La dimensión compleja de X es uno. Un punto $p \in X$ se dice punto suave o liso, si la matriz jacobiana formada por $(\frac{\partial F_k}{\partial z_j})(p)_{k=1,...,N-1, j=0,...,N}$ tiene rango $N - 1$. En caso contrario decimos que p es un punto singular. Si $p \in X$ es liso para todo p, decimos que X es no singular. Si X es una curva algebraica en $\mathbb{CP}^2$ dada por los ceros de un polinomio homogeneo irreducible de grado d diremos que X es una curva plana de grado d.

Dada una curva plana X, decimos que un punto $p \in X$ es una singularidad de tipo nodal, o que p es un nodo, si en coordenadas afines, el punto p es de la forma $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ donde las coordenadas afines de p satisfacen $z^2 - w^2 = 0$.

Una curva plana X no singular es una superficie de Riemann compacta, por lo tanto tiene un género asociado, el cual esta relacionado con el grado de X, es decir, si el grado de X es d, entonces el género de X como superficie de Riemann compacta es $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ ([2], p.220). A esta fórmula se le llama fórmula de Plucker. Existe una fórmula de Plucker cuando la curva X es singular, de ello hablaremos en la última sección.

2. Funciones meromorfas sobre superficies de Riemann

Por medio de la cartas complejas distintos conceptos y teoremas de variable compleja se extienden a superfices de Riemann.

Definición. Sea C una superficie de Riemann. Sea $p \in C$ y W una vecindad de p. Decimos que una función continua $f : W \to \mathbb{C}$ es holomorfa en p si existe una carta local $\phi : U_p \to V \subset \mathbb{C}$ con U_p abierto alrededor de p tal que $f \circ \phi^{-1} : \phi(U_p \cap W) \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa en $\phi(p) \in \mathbb{C}$.

Es claro que si f es holomorfa en p, entonces f es holomorfa en una vecindad de p. Si $U \subseteq C$ es un abierto y $f : U \to \mathbb{C}$ es holomorfa en p para todo $p \in U$, decimos que f es holomorfa, y denotamos por $\mathcal{O}_C(U) = \mathcal{O}_U := \{f : U \to \mathbb{C} | f \text{ es holomorfa}\}$. Por ejemplo, una carta compleja de una superficie de Riemann es una función holomorfa.

Ejercicio 8.- Con la notación anterior prueba que f es holomorfa en W si y solo sí existen cartas $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ con $W \subseteq \bigcup_\alpha U_\alpha$ y $f \circ \phi_\alpha^{-1}$ holomorfa sobre $\phi_\alpha(W \cap U_\alpha)$ para cada α.

Ejercicio 9.- Prueba que la suma, resta y multiplicación de funciones holomorfas es holomorfa. Si f, g son holomorfas en un punto $p \in C$ con $g(p) \neq 0$, prueba que $\frac{f}{g}$ es holomorfa en p.

Sea C una superficie de Riemann y consideremos un punto $p \in C$. Sea W una vecindad de p y $f : W - \{p\} \to \mathbb{C}$ holomorfa. Decimos que:

1.- f tiene una singularidad removible en p si y solo sí existe una carta local $\phi : U \to V \subseteq \mathbb{C}$ con $p \in U$ tal que $f \circ \phi^{-1}$ tiene una singularidad removible en $\phi(p)$.

2.- f tiene un polo en p si y solo sí existe una carta local $\phi : U \to V \subseteq \mathbb{C}$ con $p \in U$ tal que $f \circ \phi^{-1}$ tiene un polo en $\phi(p)$.

3.- f tiene una singularidad esencial en p si y solo sí existe una carta local $\phi : U \to V \subseteq \mathbb{C}$ con $p \in U$ tal que $f \circ \phi^{-1}$ tiene una singularidad esencial en $\phi(p)$.

Si escribimos $z = \phi(x)$ para x cercano a p, tenemos que $f \circ \phi^{-1}$ es holomorfa en una vecindad de $z_0 := \phi(p)$. Podemos expander $f \circ \phi^{-1}$ en serie de Laurent alrededor de z_0: $f \circ \phi^{-1}(z) = \sum_n c_n (z - z_0)^n$. A esta serie se le llama serie de Laurent de f en el punto p y los c_n se les llama los coeficientes de Laurent. Esta representación de f en serie de Laurent no depende de la elección de la carta local (ver [4], p.26) y nos da información sobre el tipo de singularidad que tiene f en el punto p.

Una función $f : C \to \mathbb{C}$ se llama *meromorfa* en un punto $p \in C$ si f es holomorfa o tiene una singularidad removible en p, o bien tiene un polo en p.

Diremos que f es meromorfa sobre una abierto $W \subseteq C$ si es meromorfa en cada punto de W. Definimos $\mathcal{M}_X(W) = \mathcal{M}_W = \{f : W \to \mathbb{C} : f \text{ es meromorfa.} \}$

Si f es una función meromorfa en un punto p con serie de Laurent $\sum_n c_n(z-z_0)^n$, definimos el orden de f en p, $\mathrm{ord}_p f$, como $\mathrm{ord}_p f = \min\{n | c_n \neq 0\}$. Esta definición no depende de la elección de cartas (Ver [4],p.27).

Ejemplos. Sea $C = \mathbb{C}$ y $W = \mathbb{C} - \{0\}$. La función $f : W \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \frac{1}{z}$ es meromorfa en $z = 0$.

Sea $f : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{C}$ definida en una vecindad del punto al infinito, es decir, en un conjunto de la forma $U_\infty := \{z \in \mathbb{C} | |z| > 1\} \cup \{\infty\}$. f es meromorfa en ∞ si y solo si $f(\frac{1}{z})$ es meromorfa en $z = 0$. Si $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ con g, h polinomios, entonces f es meromorfa en ∞. Factoriazando g y h en factores lineales, escribimos $f(z) = c(z-z_1)^{n_1} \cdots (z-z_r)^{n_r}$ con $c \neq 0$, los z_i todos distintos y los n_i enteros. Notemos que para cada $i = 1, ..., r$, $\mathrm{ord}_{z_i} f = n_i$. Además $\mathrm{ord}_\infty f = \text{grado } g - \text{grado } h = -\sum_i n_i$ y $\mathrm{ord}_p f = 0$ para $p \in \mathbb{CP}^1 - \{z_1, ..., z_r, \infty\}$. Esto prueba que $\sum\limits_{p \in \mathbb{CP}^1} \mathrm{ord}_p f = 0$. Una función racional f sobre $\mathbb{CP}^1$ es un cociente de dos polinomios complejos y por lo tanto es meromorfa y $\sum\limits_p \mathrm{ord}\ _p(f) = 0$.

Algunos teoremas acerca de funciones holomorfas y meromorfas de variable compleja se pueden enunciar también sobre superficies de Riemann. Uno de estos teoremas, es por ejemplo, el principio del módulo máximo:

Principio del módulo máximo ([4, p.29]). Sea C una superficie de Riemann y $f : W \to \mathbb{C}$ holomorfa sobre un abierto W de C. Supongamos que existe un punto $p \in W$ tal que $|f(x)| \leq |f(p)|$ para toda $x \in W$, entonces f es constante sobre W.

El principio del módulo máximo tiene una consecuencia cuando C es compacta:

Teorema.- Sea C una superficie de Riemann compacta y $f : C \to \mathbb{C}$ holomorfa, entonces f es constante.

Demostración. La prueba de este hecho se deja al lector.

Si C es compacta se tiene que $\mathcal{O}_C \simeq \mathbb{C}$ y el principio del modulo máximo nos dice que sobre un superficie de Riemann compacta solo debemos estudiar funciones meromorfas.

Ejercicio 10.- Sea C una superficie de Riemann. Enuncia y demuestra el teorema de identidad sobre C . Utiliza este teorema de identidad para probar que el conjunto de ceros y polos de una función meromorfa f sobre C es un conjunto discreto. Si C es compacta, entonces el conjunto de ceros y polos de f es un conjunto finito.

Sea C una superficie de Riemann compacta y $f : C \to \mathbb{CP}^1$ meromorfa. Sea $p \in C$, y $z : U_p \to V \subset \mathbb{C}$ carta local tal que $z(p) = 0$. Tomamos la serie de Talylor de f alrededor de p, entonces $f(z) = z^n \tilde{f}(z)$ con $\tilde{f}(0) \neq 0$. Localmente $\tilde{f}$ tiene raiz enesima y escribimos $f(z) = (zg(z))^n$. Si tomamos a $zg(z)$ como nueva coordenada local, resulta que localmente f es de la forma $z \to z^n$. Se define $b_p(f) := n$ como la multiplicidad de f en p. El entero n sólo depende del punto p y no de la carta que hemos elegido. Si $n > 1$, decimos que p es un punto de ramificación. Para $y \in \mathbb{CP}^1$ definimos $d_y(f) = \sum\limits_{p \in f^{-1}(y)} b_p(f)$. Se tiene que este número es constante e independiente de y, es decir para $y_1, y_2 \in \mathbb{CP}^1$, $d_{y_1}(f) = d_{y_2}(f)$. A tal número se le llama el grado de f ([4], p 47).

Sea $f : C \to \mathbb{CP}^1$ meromorfa de grado k. Consideremos una triangulación de $\mathbb{CP}^1$ de tal manera que los vértices de la triangulación sean los puntos de ramificación de f y sean $c_0 = \#$ caras de la triangulación , $a_0 = \#$ aristas de la triangulación y $v_0 = \#$ vertices sobre la triangulación. Tomando la imagen inversa bajo f de esta la triangulación tenemos sobre C una triangulación donde $c = kc_0$, $a = ka_0$, $v = kv_0 - \sum_p(b_p(f) - 1)$. Utilizando la caractéristica de Euler obtenemos la siguiente identidad conocida como fórmula de *Riemann-Hurwitz:*

$$2 - 2g = c - a + v = k(e(\mathbb{CP}^1)) - \sum_p (b_p(f) - 1) = 2k - \sum_p (b_p(f) - 1).$$

3. Divisores y Sistemas Lineales

Sea C una superficie de Riemann. Consideremos el conjunto $\mathbb{Z}^C := \{f : C \to \mathbb{Z} | f \text{ función}\}$.

Definición. Un divisor D sobre C, es una función $D \in \mathbb{Z}^C$ tal que el soporte de D, Supp $(D) = \{p \in C | D(p) \neq 0\}$, es un conjunto discreto.

Si C es compacta, Supp (D) es un conjunto finito $\{p_1, \ldots, p_d\}$. Sea $D(p_j) = n_j$. Así formalmente escribimos D como una suma finita de puntos con sus respectivas imagenes, es decir, $D = \sum_j n_j p_j$, donde $D(p_j) = n_j$. El grado del divisor D se define como la suma $\sum\limits_j n_j$. Escribimos $D \geq 0$ si $n_i \geq 0$ para toda i, y dados dos divisores D_1, D_2, escribimos $D_1 \geq D_2$ si $D_1 - D_2 \geq 0$. Denotamos por Div(C) el conjunto de divisores de C el cual es un grupo abeliano libre bajo la suma.

Si C es una superficie de Riemann compacta, podemos asociar a una función meromorfa $f : C \to \mathbb{CP}^1$ un divisor div (f) dado por div $(f) := \sum_p (\text{ord}_p(f)) \cdot p$. A tal divisor se le llama principal. El divisor de ceros de f, se define como $\text{div}_0(f) = \sum\limits_{p, \text{ord}_p(f) > 0} \text{ord}_p(f) \cdot p$.

El divisor de polos de f se define como $\text{div}_\infty(f) = \sum\limits_{p, \text{ord}_p(f) < 0} (-\text{ord}_p(f)) \cdot p$. Estos divisores tienen soporte disjunto y div $(f) = \text{div}_0(f) - \text{div}_\infty(f)$.

Teorema. Sea f una función meromorfa sobre una superficie de Riemann compacta C, entonces el grado de div (f) es igual a cero. ([4],p.49).

Definición. Sea C una superficie de Riemann compacta. Decimos que dos divisores $D_1, D_2 \in$ Div (C) son linealmente equivalentes y escribimos $D_1 \sim D_2$, si existe una función meromorfa f sobre C tal que $D_1 - D_2 =$ div (f). En este caso tenemos que D_1 y D_2 son del mismo grado.

Ejercicio 11-. Sean $p = i, q = 2 \in \mathbb{CP}^1$. Escribe en cinco segundos una función meromorfa que tenga como divisor a $2p - 2q$.

Sea D un divisor sobre una superficie de Riemann compacta. Definimos $\mathcal{L}(D) := \{f \in$

$\mathcal{M}(C)|\text{div }(f) \geq -D\} \cup \{0\}$. $\mathcal{L}(D)$ tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Si $D = np$ con $n > 0$ y $f \in \mathcal{L}(D)$, entonces div $(f) \geq -np$, es decir, $\text{ord}_p(f) \geq -n$, lo que implica que f tiene un polo de orden n en p pero no de orden mayor. Notemos que si $D_1 \leq D_2$ entonces $\mathcal{L}(D_1) \subseteq \mathcal{L}(D_2)$. Si $D = 0$, tenemos que $\mathcal{L}(D) = \mathcal{O}_C$.

Lema. Sea C superficie de Riemann compacta. Sea D un divisor sobre C con grado$(D) < 0$, entonces $\mathcal{L}(D) = 0$.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{L}(D)$ no idénticamente nula. Definimos $E = \text{div }(f) + D$, entonces grado $(E) \geq 0$, pero como grado (div $(f)) = 0$, se tiene que grado (D) =grado $(E) < 0$, lo cual es contradicción.

Definición. El sistema lineal completo asociado a D, $|D|$, se define como $|D| := \{E \in Div(C)|E \sim D, E \geq 0\}$. La aplicación dada por $\mathbb{P}(\mathcal{L}(D)) \to |D|$, $[f] \to \text{div }(f) + D$ da una correspondencia uno a uno. Definimos la dimensioń de $|D|$ como dim $|D|$ =dim $\mathcal{L}(D) - 1$.

Proposición.- Sea C una superficie de Riemann compacta. Si $D_1 \sim D_2$, entonces $\mathcal{L}(D_1) \simeq \mathcal{L}(D_2)$.

Demostración. Como $D_1 \sim D_2$, existe $f \in \mathcal{M}(C)$ tal que div $(f) = D_1 - D_2$. Sea $g \in \mathcal{L}(D_1)$, entonces $\text{div}(fg) = \text{div}(f) + \text{div}(g) \geq D_1 - D_2 - D_1 = -D_2$,, por lo tanto $fg \in \mathcal{L}(D_2)$. Definimos $T_f : \mathcal{L}(D_1) \to \mathcal{L}(D_2)$ dada por $T_f(g) = fg$. Es fácil ver que T_f es un isomorfismo. Entonces $\mathcal{L}(D_1) \simeq \mathcal{L}(D_2)$, de hecho $|D_1| = |D_2|$.

Notación. Si D es un divisor de grado d y si dim $\mathcal{L}(D) = r + 1$, escribimos $|D| = g^r_d$.

Definición. Una 1-forma meromorfa ω sobre una superficie de Riemann compacta C es una expresión que sobre una carta local tiene la forma $\omega(z) = f(z)dz$, donde f es una función meromorfa.

Definimos $\text{ord}_p(\omega) = \text{ord}_p(f)$. Esta definición es invariante bajo cambio de coordenadas ([4],p.107). Si $\text{ord}_p(\omega) \geq 0$, decimos que ω es holomorfa en p. Si $\text{ord}_p(\omega) = -n < 0$, decimos que p es un polo de orden n. Definimos el divisor asociado a ω, (ω), como $(\omega) := \sum\limits_{p \in C} \text{ord}_p(\omega) \cdot p$. A este divisor le llamamos un divisor canónico y su grado viene dado por $\sum\limits_{p \in C} \text{ord}_p(\omega)$.

Ejercicio 12.- Demuestra que la 1-forma meromorfa $\eta = dz$ sobre $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C}_\infty$ no tiene ceros y sólo tiene un polo de orden dos en ∞, es decir, prueba que $(\eta) = -2 \cdot \infty$.

Sean $\mathcal{M}^1(C) := \{\omega : \omega$ es una 1-forma meromorfa sobre $C\}$, $\mathcal{L}^1(D) := \{\omega \in \mathcal{M}^1(C) : (\omega) \geq -D\} \cup \{0\}$. Si $D = 0$, se tiene que $L^1(0) := \{$formas diferenciales holomorfas sobre $C\}$.

Si D es un divisor sobre una superficie de Riemann compacta, definimos $h^0(C, D) := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D)$ y $h^1(C, D) := \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}^1(D))$. Se tiene que para un divisor D sobre una superficie de Riemann compacta, $h^i(C, D) < \infty$ para $i = 0, 1$.(Ver [5],p.32). Algunos autores llaman a dim $L^1(0)$ el género analítico de C, el cual resulta ser igual al género topológico de C, es decir, $g =$ dim $L^1(0)$ ([4], p.191). Decimos que un divisor D es especial si $h^0(C, D) \cdot h^1(C, D) > 0$.

Para un divisor arbitrario D sobre C existe una fórmula que da una relación entre los espacios $h^i(C, D)$ con el grado del divisor D y el género de C. Tal fórmula se conoce como *Teorema de Riemann-Roch*:

Teorema de Riemann-Roch. Sea C una superficie de Riemann compacta de género g. Sea D un divisor sobre C de grado d. Entonces $h^0(C,D) - h^1(C,D) = d - g + 1$.

Este es uno de los teoremas más importantes en la teoría de divisores sobre superficies de Riemann compactas y existen diversas pruebas de este teorema, algunas son algebraicas, otras utilizan lo que se llama *cohomología de gavillas*. Una prueba basada en una serie de ejercicios y que el lector podría intentar resolverlos se encuentra en ([1], p. 50-51). Esta prueba da evidencia clara de la relación entre las superficies de Riemann compactas y las curvas planas con singularidades. Incluso, de tal prueba se puede deducir la fórmula de Plucker más general para curvas planas con singularidades que nosotros enunciaremos más adelante.

Como una aplicación sencilla del teorema de Riemann-Roch tenemos el siguiente hecho:

1.- Sea C una superficie de Riemann compacta de género g y sea $p \in C$ un punto. Entonces, existe una función meromorfa no constante f sobre C la cual tiene un único polo en q de orden a lo más $g+1$.

Para probar esta afirmación procedemos como sigue: Sea $D : C \to \mathbb{Z}$ el divisor dado por $D(p) = g+1$ si $p = q$, y $D(p) = 0$ si $q \neq p$. El grado de D es $g+1$. Por la fórmula de Riemann-Roch $h^0(C,D) = 2 + h^1(C,D) \geq 2$, entonces existe una función meromorfa no constante f tal que $(f)(q) \geq -D(q)$, es decir $-\mathrm{ord}_q(f) \geq -(g+1)$, o biene, $\mathrm{ord}_q(f) \leq g+1$. De hecho notemos que f es holomorfa en todo $C - \{q\}$.

Ejercicio 13-. Si D_1, D_2 son dos divisores equivalentes sobre una superficie de Riemann compacta, prueba que $\mathcal{L}^1(D_1) \simeq \mathcal{L}^1(D_2)$.

Sea $f : C \to \mathbb{CP}^1$ meromorfa de grado k y consideremos $\eta = dz$ la 1-forma meromorfa sobre $\mathbb{CP}^1$. η. Sea $\omega := f^*(\eta) = df$. Si f se escribe localmente alrededor de un punto de ramificación $q_i \in C$ con $f(q_i) \neq \infty$ como $f(z) = z^{k_i}$, entonces q_i es un cero de orden $k_i - 1$ para ω. En los puntos p_j donde $f(p_j) = \infty$ se tiene que ω tiene un polo de orden dos. Si R es el conjunto de puntos de ramificación de f, entonces $(\omega) = \sum\limits_{q_i \in R} (k_i - 1)q_i - 2(\sum\limits_{j=1}^{k} p_j)$, entonces grado$(\omega) = \sum(k_i - 1) - 2k$. Por la fórmula de Riemann-Hurwitz se tiene que grado$(\omega) = 2g - 2$.

Proposición.- Sea C una superficie de Riemann compacta y ω_0 una 1-forma meromorfa no cero. Entonces grado $(\omega_0) = 2g - 2$.

Demostración. Sea $f : C \to \mathbb{CP}^1$ meromorfa y sea $\omega = f^*(dz)$. Se tiene que $g := \frac{\omega_0}{\omega}$ es una función meromorfa y grado div $(g) = 0$.

Si C es una superficie de Riemann de compacta, D un divisor de sobre C y $f_0, \ldots, f_r$ es una base para $\mathcal{L}(D)$, tenemos que la función $\phi : C \to \mathbb{CP}^r = \mathbb{P}(\mathcal{L}(D))$ dada por $\phi(p) := [f_0(p) : \cdots : f_r(p)]$ NO esta definida en los puntos p tales que $f_j(p) = 0$ para toda j y en los puntos p donde existe algun k con $f_k(p) = \infty$. La función ϕ se extiende de forma holomorfa a todo C de la siguiente manera:

Sea $p \in C$ cualquier punto y sea $k := \min_j(\mathrm{ord}_p(f_j))$. Podemos suponer que en una vecindad de p ninguna f_j tiene otro polo mas que posiblemente en p y que en tal vecindad no hay ceros comunes de los f_j excepto quizas p.

Si tomamos una carta local $z : U_p \to \mathbb{C}$ alrededor de p, con $z(p) = 0$, tenemos que cada $f_j(z)$ es holomorfa para $z \neq 0$ cerca del origen y no hay ninguna z que sea raíz comun de cada f_j. Podemos escribir $f_j = z^k g_j$, donde g_j es holomorfa en una vecindad de p y al menos existe un subíndice j tal que $g_j(p) \neq 0$.

Para z cerca de p con $z \neq 0$ definimos $\tilde{\phi}(p) = [g_0(z) : \cdots : g_r(z)] = [z^{-k} f_0(z) : \cdots : z^{-k} f_r(z)]$. Como al menos alguna $g_j \neq 0$, se tiene que $\tilde{\phi}(z) \in U_j$, donde U_j es un abierto de la cubierta abierta de $\mathbb{CP}^r$. En el punto p, donde $z(p) = 0$, tomamos $\tilde{\phi}(p) := [g_0(0) : \cdots : g_r(0)]$. Esto nos hace ver que tenemos una aplicación holomorfa $C \to \mathbb{CP}^r$ bien definida. Así pues, dado un divisor D sobre C podemos estudiar aplicaciones holomorfas $C \to \mathbb{CP}^r$. La imagén de C será una curva algebraica(posiblemente singular) y por medio de estos divisores podemos ver la relación entre las superficies de Riemann compactas y las curvas algebraicas.

Definición. Decimos que una aplicación $\phi : C \to \mathbb{CP}^r$ es birracional si existe un abierto denso U de C donde $\phi|_U : U \to \mathbb{CP}^r$ es un biholomorfismo, es decir, ϕ_U es una función holomorfa con inversa holomorfa.

Si X es una curva plana con singularidades de tipo nodal, existe una técnica que "resuellve" dichas singularidades X, es decir, a X uno le puede asociar un única superficie de Riemann compacta C_X salvo isomorfismo, con una aplicación birracional $\tau : C_X - -- > X$([4],p.69), es decir, si X_{sing} es el conjunto de nodos de X, se tiene que $C_X - \tau^{-1}(X_{\mathrm{sing}})$ es biholomorfo a $X - X_{\mathrm{sing}}$. A C_X se le llama la desingularización de X. Si d es el grado de X, y δ es el numero de nodos de X, se tiene que el género de C_X viene dado por la siguiente fórmula de Plucker para curvas planas con nodos: $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta$ ([2], p.262).

El siguiente resultado nos dice toda superficie de Riemann compacta C admite un modelo biracional a una curva plana X con nodos, es decir, C admite un sistema lineal g_d^2 para una cierta d:

Teorema.- Sea C una superficie de Riemann compacta. Entonces existe una aplicación holomorfa $f : C \to \mathbb{CP}^2$ cuya imagen $X = f(C)$ es una curva plana con nodos y donde $f : C \to X$ es biracional.

Demostración. Ver [1], p.50. En este caso se tiene que $C \simeq C_X$.

Denotemos por $PGL(3, \mathbb{C})$, el grupo de biholomorfismos proyectivos de $\mathbb{CP}^2$. La fórmula de Plucker nos permite relacionar dos variedades de la siguiente manera: Decimos que dos superficies de Riemann compactas C_1, C_2 son equivalentes si C_1 y C_2 son biholomorfas. Sea $[C]$ la clase de equivalencia de una superficie de Riemann compacta. Definimos la variedad moduli de superficies de Riemann compactas como $\mathcal{M}_g := \{[C] : C$ es superficie de Riemann compacta de género $g\}$. Se tiene que para $g \geq 2$, $\mathcal{M}_g$ es una variedad compleja de dimensión $3g - 3$ ([3], p.43). Sea $\mathcal{U}_{g,d}^{\delta} := \{X : X$ es curva plana reducida e irreducible de grado $d,$ género g con δ nodos$\}$. La variedad $\mathcal{V}_{g,d}^{\delta} := \mathcal{U}_{g,d}^{\delta}/PGL(3, \mathbb{C})$ se llama variedad de Severi y tiene dimensión $3d + g - 9$ ([3], p.30). La aplicación natural entre estas dos variedades esta dada por:

$$\Psi : \mathcal{V}^{\delta}_{g,d} \to \mathcal{M}_g, \quad \Psi(X) = C_X.$$

Mediante el estudio de la aplicación Ψ uno puede preguntarse ”cuántos” modelos proyectivos planos de grado d tiene una superficie de Riemann compacta de género g. Para ello, se define el *número de Brill-Noether* de una g^2_d sobre una superficie de Riemann compacta C de género g como $\rho(g, 2, d) := 3d - 2g - 6$. Notemos que $\dim \mathcal{V}^{\delta}_{g,d} = \rho(g, 2, d) + 3g - 3$. De aqui tenemos que saber ”cuantos ” son los modelos planos de grado d de una superficie de Riemann compacta es calcular la dimensión de $\Psi^{-1}([C])$, para $[C] \in \mathcal{M}_g$. Si $\rho(g, 2, d) \geq 0$, se tiene que en general(en el sentido de moduli) las fibras de la aplicación Ψ tienen dimensión presisamente $\dim \mathcal{V}^{\delta}_{g,d} - \dim \mathcal{M}_g = \rho(g, 2, d) \geq 0$, ([3], p.27). El estudio de las fibras de la aplicación Ψ es parte de lo que se conoce como *teoría de Brill-Noether para divisores especiales.*

En la actualidad esta teoría esta muy bien entendida y sigue dando resultados interesantes que nos permiten entender mejor la geometría de las curvas algebraicas. El lector interesado sobre el origen, desarrollo y problemas relacionados con la variedad $\mathcal{M}_g$, la variedad de Severi y teoría de Brill-Noether puede encontrar en las referencias [1] y [3] una exposición sobre los teoremas más importantes y algunos problemas abiertos actuales en esta dirección.

Agradecimientos

Estas se sustentan en un minicurso que fue impartido por un servidor en la unidad de Cs. Básicas de la Universidad Juárez Autonóma de Tabasco(UJAT) del 31 de enero al 4 de febrero de 2005 durante la Primera Escuela de Invierno de Geometrá y Dinámica. En la exposición de tales notas tuve la experiencia de utilizar un pizarrón electrónico en el cual se guardo toda la exposición en un archivo pdf. Basandome en tales archivos escribí estas notas en latex en el orden en que expuse el curso. Quiero agradecer a todo el personal de la división de Cs. Básicas de la UJAT el apoyo otorgado durante mi estancia y de manera muy especial a mi colega y amigo, Dr. Victor Castellanos Vargas por todo el entusiasmo que tuvo en esta escuela de invierno.

Referencias

[1] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths, J. Harris, *Geometry of Algebraic Curves Volume I.* Grundlehrem der Mathematischen Wissenschaften 267. Springer-Verlag 1984.

[2] P. Griffiths, J. Harris *Principles of algebraic geometry.* John Wiley 1994.

[3] J. Harris, I. Morrison, *Moduli of curves.* Springer Verlag 1998.

[4] R. Miranda, *Algebraic curves and Riemann surfaces.* Graduate studies in mathematics Vol 5. American Mathematical Society 1995.

[5] R. Narasimhan, *Compact Riemann Surfaces.* Birkhauser Verlag 1992.