Invitación al álgebra homólogica

Alexis G. Zamora *

Unidad Académica de Matemáticas, UAZ
Camino a la Bufa y Calzada Solidaridad, C.P. 98068,
Zacatecas, Zac., México

Estas notas ofrecen una introducción al álgebra homológica a través de ejemplos clásicos. La discusión de temas como el teorema del rango, la cohomología de de Rham y el complejo de Koszul sirven de pretexto para introducir las definiciones básicas del álgebra homológica. La última sección es una introducción a módulos proyectivos y Hom.

This notes gives an introduction to homological algebra through classical examples. By means of topics like the rank theorem, the de Rham cohomology and Koszul complexes the basic concepts of homological algebra are introduced. The last section is devoted to an introduction to projective modules and Hom.

1. Introducción

Estas notas están basados en el minicurso que ofrecí en la I Escuela de Invierno de Geometría y Dinámica que se realizó del 31 de enero al 4 de febrero en la Universidad Autónoma Juárez de Tabasco. La intención del minicurso era doble: introducir los conceptos básicos del álgebra homológica y mostrar varias situaciones, provenientes de diversas ramas de las matemáticas, en que estos conceptos pueden resultar útiles. Estas notas cumplirán su cometido si después de leerlas algún lector siente curiosidad por estudiar con más detalle algunos de los ejemplos o conceptos planteados aquí, y está dispuesto para esto a enfrentarse con las usualmente áridas primeras páginas de los tratados de álgebra homológica.

Aunque el minicurso constó de 4 lecciones he dividido estas notas en 5 lecciones, por considerar que prestaba más orden al texto. Varios ejercicios se encuentran diseminados en el texto, por lo general indican un enunciado que debe demostrarse para completar las aserciones hechas. El lector debe notar que podría haber muchos más de este tipo: sería deseable que dónde quiera que aparezca una afirmación sin demostrar o alguna ambigüedad en el planteamiento, se detuviera a pensar en el asunto.

Debo expresar aquí mi sincero agradecimiento a los organizadores de la Escuela, Drs. Víctor Castellanos y Gamaliel Blé por su entusiasmo y eficiencia. La utilización de un pizarrón electrónico, en que quedaron grabados nuestros apuntes del curso, simplificó notablemente la elaboración de estas notas. Finalmente, todos los participantes contribuyeron para que esta semana en Villahermosa fuera una oportunidad única para hablar sobre matemáticas en un ambiente al mismo tiempo serio y relajado, de auténtico compañerismo.

* alexis@mate.reduaz.mx

2. Lección 1: El Teorema del Rango

Sean E y F espacios vectoriales definidos sobre un campo k (el lector puede pensar en $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). En todo curso elemental de álgebra lineal se demuestra el siguiente:

Teorema 1 (del rango) Sea $f : E \to F$, una aplicación lineal, entonces:

$$\dim E = \dim(Kerf) + \dim(Imf).$$

En este enunciado, como es usual, $Kerf := \{x \in E \mid f(x) = 0\}$ e $Imf := \{y \in F \mid \exists x \in E, f(x) = y\}$.

Estos dos conjuntos son subespacios vectoriales de E y F, respectivamente. Al número $\dim(Imf)$ se le llama el rango de f, de ahí el nombre del teorema.

Nuestro primer paso hacia el álgebra homológica será reescribir en otros términos este teorema. Ante todo observemos que dada f tenemos la siguiente sucesión de espacios vectoriales y aplicaciones lineales:

$$KerF \xrightarrow{i} E \xrightarrow{f} Imf,$$

donde i es la inclusión. Esta sucesión satisface:

1. i es inyectiva,
2. f es sobreyectiva,
3. $Im(i) = Kerf$.

Esto sugiere la siguiente:

Definición 1 (sucesión exacta) Sea:

$$V^{\cdot} : \cdots \to V_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} V_i \xrightarrow{f_i} V_{i+1} \xrightarrow{f_{i+2}} \ldots ; (i \in \mathbb{Z}),$$

una sucesión de k-espacios vectoriales V_i y de aplicaciones k-lineales y cada $f_i : V_i \to V_{i+1}$.

$V^{\cdot}$ se llama una sucesión exacta si para todo $i \in \mathbb{Z}$ $\quad Imf_i = Kerf_{i+1}$.

Ejemplo 1. Si $f : E \to F$ es una aplicación lineal, entonces $0 \to Kerf \xrightarrow{i} E \xrightarrow{i} Imf \to 0$, es una sucesión exacta.

En general una sucesión del tipo

$$0 \to V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} V_3 \to 0,$$

es exacta si y sólo si:

1. f_1 es inyectiva,
2. f_2 es sobreyectiva,
3. $Imf_1 = Kerf_2$.

En tal caso se le llama *sucesión exacta corta*.

Ejercicio 1. Demostrar la afirmación anterior.

Ahora estamos en condición de enunciar nuestro teorema del rango generalizado.

Teorema 2 (del rango) Se consideran los siguientes casos:

a) Para toda $0 \to V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} V_3 \to 0$, sucesión exacta corta, se satisface: $\dim V_2 = \dim V_1 + \dim V_3$.

b) Para toda sucesión exacta $V^{\cdot} : \cdots \to V_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} V_i \xrightarrow{f_i} V_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \ldots$, se satisface: $\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1) \dim V_i = 0$.

Como corolario obtenemos la formulación original:

Corolario 1. Si $f : E \to F$ es una aplicación lineal, entonces:

$$\dim E = \dim(Kerf) + \dim(Imf).$$

Prueba. Como $0 \to V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} V_3 \to 0$ es exacta, tenemos las siguientes identificaciones:

- V_1 se puede identificar, mediante f_1, con un subespacio vectorial de $V_2 : V_1 \subset V_2$,
- $V_3 \simeq V_2/V_1$, el espacio cociente de V_2 por el subespacio V_1.

Sea $\{e_1, ..., e_k\}$ una base de V_1 y $\{\epsilon_1, ..., \epsilon_l\}$ una base de V_3. Sea $\{\epsilon'_1, \ldots, \epsilon'_l\}$ un "levantamiento" a V_2 de la base elegida en V_3.

Sea $v \in V$ un elemento arbitrario de V_2, existen $\beta_j \in k$ tales que:

$$f_2(v) = \sum_{j=1}^{l} \beta_j \epsilon_j.$$

Levantando esta relación a V_2 tenemos:

$$v = \sum_{j=1}^{l} \beta_j \epsilon'_j + v_0, \quad v_0 \in Kerf_2 \simeq V_1.$$

Por tanto,

$$v = \sum_{j=1}^{l} \beta_j \epsilon'_j + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i,$$

para alguna colección $\{\alpha_i \in k\}$. Esto demuestra que $\{e_1, ..., e_k, \epsilon'_1, ..., \epsilon'_l\}$ es un conjunto generador de V_2. La demostración de que estos elementos son linealmente independientes es similar. ■

Ejercicio 2. Demuestre la parte b) del teorema.

3. Lección 2. Formas diferenciales en $\mathbb{R}^2$.

Todas las funciones que consideraremos en esta lección son de clase $\mathcal{C}^\infty$. Resumimos en la siguiente tabla las definiciones y propiedades elementales de las formas diferenciales en $\mathbb{R}^2$.

	Expresión	Conjunto (conexo) de integración	Expresión de la integral
Ω^0	f	$p \in \mathbb{R}^2$	$f(p)$
Ω^1	$\omega = pdx + qdy$	curvas $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$	$\int_\Gamma \omega = \int_0^1 (p(t)\gamma'_1(t) + q(t)\gamma'_2(t))dt$
Ω^2	$hdx \wedge dy$	dominios $U \subset \mathbb{R}^2$	$\int\int_U hdx \wedge dy($ integral de Riemann)

En estas expresiones f,p, q, h son funciones (de clase $\mathcal{C}^\infty$) y Γ es una curva, esto es, la imagen en $\mathbb{R}^2$ de una función de clase $\mathcal{C}^1$: $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)), \quad t \in [0, 1].$$

La expresión $p(t)$ tiene el significado $p(t) = p(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$.

Los elementos de Ω^i se denominan i-formas. Estos espacios vectoriales tienen aplicaciones naturales definidas entre ellas, los llamados operadores diferenciales o simplemente el diferencial $d : \Omega^i \to \Omega^{i+1}$. Se definen por medio de las siguientes expresiones:

- si $f \in \Omega^0(\simeq \mathcal{C}^\infty)$, $df := f_x dx + f_y dy$,
- si $\omega = pdx + qdy \in \Omega^1$, $d\omega := (p_y - q_x)dx \wedge dy$.

El diferencial de toda $2-$forma es cero. De este modo podemos definir una sucesión de espacios vectoriales y aplicaciones lineales:

$$\Omega^\cdot : 0 \to \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \to 0.$$

Nos preguntamos si esta sucesión es exacta. La respuesta a esta pregunta es obviamente negativa, pues si $f \in \Omega^0$ es cualquier función constante $df = 0$. Esta dificultad podemos salvarla modificando nuestra definición de $\Omega^\cdot$:

$$\Omega^\cdot : 0 \to \mathbb{R} \to \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \to 0,$$

con la nueva aplicación definida como la inclusión.

Ejercicio 3. Demostrar que $d : \Omega^1 \to \Omega^2$ es sobreyectiva.

De este modo $\Omega^\cdot$ es exacta si y sólo si para 1-formas $\omega = pdx + qdy$ las condiciones:

a) $d\omega = 0$,

b) existe $f \in \Omega^0$ tal que $f_x = p$, $f_y = q$ son equivalentes.

Definición 2 (formas cerradas y exactas) Una $1-$forma $\omega = pdx + qdy$ se llama cerrada si $d\omega = 0$ (equivalentemente si $p_y = q_x$). ω se llama exacta si existe $f \in \Omega^0$ tal que $f_x = p$ y $f_y = q$.

Así nuestro problema es investigar si para $1-$formas son equivalentes las condiciones de ser exacta y cerrada. Una de las dos implicaciones es una simple consecuencia de la conmutatividad de las derivadas parciales mixtas, si $f \in \Omega^0$, entonces:

$$d^2 f = d(df) = d(f_x dx + f_y dy) = (f_{xy} - f_{yx})dx \wedge dy = 0.$$

Esto es, toda forma exacta es cerrada. El recíproco de esta afirmación también es cierto. Sea ω una forma cerrada, definamos

$$f(p) := \int_0^p \omega, \quad p \in \mathbb{R}^2.$$

El significado de la integral es tomar cualquier curva γ tal que $\gamma(0) = 0$ y $\gamma(1) = p$. Por supuesto, para que esta definición tenga sentido es necesario que el valor de la integral sea independiente de la curva γ elegida, o equivalentemente que para toda curva cerrada Γ $(\gamma(0) = \gamma(1))$:

$$\int_\Gamma \omega = 0.$$

La independencia de la integral con respecto a la curva de integración la garantiza el teorema de Green:

Teorema 3. Sea ω una $1-$forma y Γ una curva cerrada en $\mathbb{R}^2$, entonces

$$\int_\Gamma \omega = \int\int_{\Gamma^o} d\omega.$$

Donde Γ^o denota el interior de Γ.

Ejercicio 4. Demuestre que efecto $d(\int_0^p \omega) = \omega$.

Con esto resolvemos completamente el problema planteado, siempre que trabajemos en $\mathbb{R}^2$, pero ¿qué sucede si consideramos formas definidas sobre dominios arbitrarios $U \subset \mathbb{R}^2$? Nuestro último argumento ya no será válido, pues la demostración del teorema de Green se basa en el hecho de que el interior de Γ es un dominio simplemente conexo del plano.

Consideremos, por ejemplo, $U = \Delta_1 - \{(0,0)\}$, el disco abierto de radio 1 menos el origen. De ahora en adelante $\Omega^i(U)$ denotará el espacio de $i-$formas diferenciales definidas sobre U, o sea las funciones que aparecen como coeficientes de nuestras formas serán ahora elementos de $\mathcal{C}^\infty(U)$. Nuevamente nos preguntamos si la sucesión $\Omega^{\cdot}(U)$ es exacta. Naturalmente, el mismo argumento usado anteriormente demuestra que toda forma exacta sobre U es también cerrada. Sin embargo, toda forma cerrada no es exacta. Para convencernos de esta última afirmación introducimos las formas diferenciales complejas.

Identifiquemos el plano $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ del modo usual, $z = x+iy$. Una forma diferencial compleja ω es una expresión del tipo $\omega = f(z)dz$, con $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ una función diferenciable con variable y valores complejos y $dz = dx + idy$.

La expresión de ω puede reescribirse como:

$$f(z)dz = (u(x,y) + iv(x,y))dx + (iu(x,y) - v(x,y))dy.$$

Vista de este modo toda forma diferencial compleja es una forma real pero con valores en los números complejos. Ahora bien, ω será cerrada si y sólo si:

$$(u + iv)_y = (iu - v)_x,$$

esto es, si y sólo si:

$$u_y = -v_x, \quad u_x = v_y.$$

Estas son las bien conocidas condiciones de Cauchy-Riemann. Podemos concluir entonces que una forma diferencial compleja $f(z)dz$ en U es cerrada si y sólo si $f(z)$ es una función holomorfa en U. Como un subproducto de nuestra discusión obtenemos el siguiente teorema de Cauchy, que es la base de la teoría de funciones holomorfas:

Teorema 4. Sea $\Gamma \subset \mathbb{C}$ una curva simple tal que su interior U es un dominio simplemente conexo. Si f es una función holomorfa en una vecindad de $\bar{U}$ entonces

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0.$$

Para finalizar, regresemos a nuestro dominio $U = \Delta_1 - \{(0,0)\}$. Consideremos la forma compleja $\frac{1}{z}dz$, que es holomorfa en U. Sabemos por tanto que nuestra forma es cerrada, sin embargo esta no puede ser exacta, pues de serlo su "primitiva", $ln(z)$ tendría una rama bien definida en U.

Ejercicio 5. Deducir de lo anterior que la sucesión $\Omega^{\cdot}(U)$ no es exacta.

4. Lección 3. Complejos de módulos y homología

La propiedad $d^2 f = 0$ para toda función diferenciable f sugiere de manera natural la noción de complejo. Sin embargo, antes de plantear la definición introducimos una clase de objetos que generalizan el concepto de espacio vectorial y para los cuales puede ser definidos igualmente los complejos.

Para simplificar la discusión suponemos que R es un anillo conmutativo y con 1 (por ejemplo, $k[x_1, ..., x_n]$ el anillo de polinomios en n variables).

Definición 3. (Definición de módulos) Sea R un anillo (con las convenciones anteriores), un $R-$módulo M es un grupo abeliano $(M, +)$ provisto de una aplicación: $R \times M \to M, \quad (r,m) \to rm$ que satisface:

i) $\forall a \in R$, la aplicación $M \to M, \quad m \to am$ es $R-$lineal,

ii) $\forall a_1, a_2 \in R$ y $m \in M$, $(a_1 + a_2)m = a_1 m + a_2 m$.

iii) $\forall m \in M$, $1m = m$.

Ejemplo 2. 1. Si $R = k$ es un campo, entonces los $k-$módulos son precisamente los $k-$espacios vectoriales.

2. R es un $R-$módulo con $R \times R \to R$ la multiplicación del anillo.

3. Si $I \subset R$ es un ideal, entonces I es un $R-$módulo con la multiplicación del anillo.

4. $M_1 \subset M_2$ es llamado un submódulo de M_2 si es un subgrupo de M_2 y $RM_1 \subset M_1$. En tal caso el grupo cociente M_2/M_1 es un $R-$módulo.

5. Si M_1, M_2 son $R-$módulos, la suma directa $M_1 \oplus M_2$ es un $R-$módulo. En particular la suma directa de R consigo mismo n veces, R^n, se denomina el módulo libre de rango n.

6. Los espacios Ω^i son Ω^0-módulos.

Entre dos módulos definidos sobre un mismo anillo existe la noción de aplicaciones $R-$lineales. Nótese, por ejemplo, que la aplicación $\mathbb{R}-$lineal $d : \Omega^1 \to \Omega^2$ no es Ω^0-lineal.

Definición 4 (complejos) Sea $M^{\cdot} : \cdots \to M_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} M_i \xrightarrow{d_i} M_{i+1} \xrightarrow{d_{i+2}} \ldots$, una sucesión de $R-$módulos y aplicaciones $R-$lineales. $M^{\cdot}$ se llama un complejo si, para todo $k \in \mathbb{Z}$, $d_{k+1} \circ d_k = 0$.

La condición $d_{k+1} \circ d_k = 0$ es equivalente a $Imd_k \subset Kerd_{k+1}$. Si además $Imd_k = Kerd_{k+1}$, $M^{\cdot}$ se llama sucesión exacta.

Ejemplo 3. Sea $U = \Delta_1 - \{(0,0)\}$ entonces, por la discusión de la lección anterior, $\Omega^{\cdot}(U)$ es un complejo pero no una sucesión exacta.

Definición 5 (cohomología) Sea $M^{\cdot}$ un complejo de $R-$módulos, el $i-$ésimo módulo de cohomología de $M^{\cdot}$ se define como:

$$H^i(M^{\cdot}) := Kerd_i/Imd_{i-1}.$$

En particular si $U \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio a la cohomología de $\Omega^{\cdot}(U)$ se le llama cohomología de “de Rham” de U y se denota por $H^i_{DR}(U)$. Reformulando nuestro análisis sobre las formas diferenciales en $\mathbb{R}^2$ podemos establecer:

$U \subset \mathbb{R}^2$ *es simplemente conexo* $\iff H^1_{DR}(U) = 0$.

Este hecho es la primera manifestación de un principio general: la cohomología de complejos nos brinda información muy importante sobre los objetos que estamos estudiando. Esta información puede ser, dependiendo del contexto, algebraica, topológica o geométrica.

También es posible definir un morfismo entre dos complejos. Si $M^{\cdot}$ y $N^{\cdot}$ son dos complejos tenemos:

Definición 6 (morfismos de complejos) Un morfismo $\alpha : M^{\cdot} \to N^{\cdot}$, es una colección de aplicaciones $R-$lineales $\alpha_i : M_i \to N_i$ tal que los cuadrados

$$\begin{tikzcd} M_{i-1} \arrow[r, "d_{i-1}"] \arrow[d, "\alpha_{i-1}"'] & M_i \arrow[d, "\alpha_i"] \\ N_{i-1} \arrow[r, "\delta_{i-1}"] & N_i \end{tikzcd},$$

conmuntan para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio 6. Dado $\alpha : M^{\cdot} \to N^{\cdot}$ un morfismo de complejos demuestre que α induce una aplicación $R-$lineal: $\alpha^* : H^i(M^{\cdot}) \to H^i(N^{\cdot})$

La siguiente definición es la clave para comparar la cohomomología de complejos.

Definición 7 (morfismo cero-cohomólogico) Un morfismo de complejos $\alpha : M^{\cdot} \to N^{\cdot}$, se dice cero-cohomólogico si existe aplicaciones $R-$lineales

$$h_i : M_i \to N_{i-1},$$

tales que $\alpha_k = h_{k+1}d_k + \delta_{k-1}h_k$.

Lema 1. Si α es cero-cohomológica entonces α^* es la aplicación cero.

Prueba. La primera observación es que α_k envía el $ker(d_k)$ en el kernel de δ_k (esto es precisamente lo que permite definir α^*). Sea $m \in ker(d_k)$. Entonces:

$$\alpha_k(m) = h_{k+1}d_k(m) + \delta_{k-1}h_k(m),$$

pero $d_k(m) = 0$, y $\delta_{k-1}h_k(m) \in Im(\delta_{k-1})$, y por tanto su clase es cero en $H^k(N^{\cdot})$. ■

El modo más usual de obtener información de este lema es notar que si dos morfismos: $\alpha, \beta : M^{\cdot} \to N^{\cdot}$ satisfacen que $\alpha - \beta$ es cero-cohomólogica, entonces $\alpha^* = \beta^*$.

5. Lección 4. Dos ejemplos de complejos

5.1 Complejo de Koszul de longitud 2

Comenzamos con la siguiente definición básica:

Definición 8 (divisor de cero) Sea R un anillo (conmutativo y con 1), $x \in R$ se llama un divisor de cero si $\exists y \in R$, $y \neq 0$ tal que $xy = 0$. Si x no es divisor de cero se le llama elemento regular.

Dados cualesquiera dos elementos $x, y \in R$ definimos $(x : y) := \{a \in R \mid ay \in <x>\}$.

Ejercicio 7. Demuestre que $(x:y)$ es un ideal de R.

Sea $x \in R$, definimos el siguiente complejo:$K(x): 0 \to R \xrightarrow{\cdot x} R,$

A pesar de su aspecto inofensivo la cohomología de este complejo nos brinda alguna información sobre x. En efecto, $H^0(K(x)) = Ker(R \xrightarrow{\cdot x} R) = (0:x)$, de modo que x es regular si y sólo si $H^0(K(x)) = 0$.

Un problema más interesante se presenta si elegimos dos elementos $x, y \in R$ y definimos la noción de conjunto regular. El conjunto ordenado $\{x, y\}$ se llamará regular si:

a) x es regular,

b) la clase de y en $R/<x>$ (denotada por $\bar{y}$) es regular.

Supongamos entonces que x es regular y sea y cualquier otro elemento en R. Definimos el complejo:

$$K(x,y): 0 \to R \xrightarrow[d_0]{\binom{y}{x}} R \oplus R \xrightarrow[d_1]{(-x,y)} R \to 0.$$

Es fácil comprobar que esta sucesión es, en efecto, un complejo. Calculemos su cohomología:

$$H^0(K(x,y)) = Ker(d_0) = \{a \in R \mid ay = 0 \text{ y } ax = 0\} = 0,$$

ya que x es regular.

Veamos ahora quién es $H^1(K(x,y)) = Ker(d_1)/Im(d_0)$. En primer lugar

$$Ker(d_1) = \{\tbinom{a}{b} \mid -ax + by = 0\}.$$

La condición $by = ax$ implica que $b \in (x:y)$. Inversamente, si $b \in (x:y)$, entonces existe a tal que $by = ax$, además este a será único pues la existencia de $a' \neq a$ con la misma propiedad implica que x es divisor de cero. Esta correspondencia biunívoca establece un isomorfismo de ideales (esto es, dicha correspondencia es $R-$lineal):

$$Ker(d_1) \simeq (x:y).$$

Por otro lado

$$Im(d_0) = \{\tbinom{cy}{cx} \mid c \in R\}.$$

De este modo $Im(d_0)$ puede ser identificado, a través del isomorfismo anterior, con el ideal generado por $<x> \subset (x:y)$. En conclusión:

$$H^1(K(x,y)) \simeq (x:y)/<x>.$$

Ahora estamos en condición de formular la conclusión de nuestro análisis:

Proposicón 1. Sea $x \in R$ un elemento regular, $y \in R$. El conjunto ordenado $\{x, y\}$ es regular si y sólo si: $H^1(K(x,y)) = 0$.

Prueba. $\bar{y} \in R/ < x >$ es regular si y sólo si

$$(0 : \bar{y}) \simeq (x : y)/ < x > \simeq H^1(K(x, y)) = 0.$$

■

Este ejemplo ilustra una vez más cómo la cohomología de complejos codifica importante información sobre los objetos estudiados. En este caso la información es de tipo algebraica.

5.2 Homología simplicial

El siguiente ejemplo puede ser considerado, junto con el teorema del rango y el estudio de formas cerradas, como la motivación histórica más importante para el surgimiento del álgebra homológica.

Sea X una superficie de Riemann compacta (o más generalmente una $2-$variedad real, conexa, compacta, sin frontera y orientable). Un triángulo en X se define como la imagen del triágulo "estándar" en $\mathbb{R}^2$ bajo una aplicación homeomorfa. Más precisamente, $\Delta_2 \subset \mathbb{R}^2$ es el triángulo definido por los vértices $v_0 = (0, 0)$, $v_1 = (0, 1)$, $v_2 = (1, 0)$, una orientación se define como un ordenamiento de los vértices, concretamente tomamos:

$$v_0 < v_1 < v_2.$$

Con esta orientación tiene sentido hablar de la región interior a Δ_2 y cometiendo un ligero abuso de lenguaje llamaremos Δ_2 al triángulo junto con su interior.

Similarmente definimos el eje estándar en $\mathbb{R}^2$ como el segmento de recta orientado $\Delta_1 = v_0 \bar{} v_1$ y el vértice estándar como el punto $\Delta_0 = v_0$. Además los tres ejes de Δ_2 serán denotados por:

$$I_0 := v_1 \bar{} v_2, \quad I_1 := v_0 \bar{} v_1, \quad I_2 := v_0 \bar{} v_1 (= \Delta_1).$$

Es completamente natural definir la frontera orientada de Δ_i como:

$$\delta(\Delta_2) = I_0 - I_1 + I_2,$$
$$\delta(\Delta_1) = v_0 - v_1,$$
$$\delta(\Delta_0) = 0,$$

(el lector está invitado a convencerse de la "naturalidad" de estas definiciones mediante un dibujo).

Finalmente, se define $C_i(X)$ como el grupo abeliano libre generado por todas las posibles imágenes homeomorfas de Δ_i en X. El operador δ definido anteriormente puede extenderse por medio de imágenes homeomorfas y linealidad a los grupos $C_i(X)$. Como resultado obtenemos un complejo de $\mathbb{Z}-$módulos (o sea, de grupos abelianos):

$$C_2(X) \xrightarrow{\delta} C_1(X) \xrightarrow{\delta} C_0(X) \to 0.$$

Nótese que en este caso los módulos que forman el complejo están numerados en orden decreciente. De un modo ingenuo podemos decir que debido a esta notación hablamos de "homología" del complejo, en lugar de cohomología. La verdadera razón de este cambio de notación hay que buscarla en la noción de dualidad de módulos.

La homología de este complejo, llamada homología simplicial y denotada por $H_i(X,\mathbb{Z})$ guarda toda la información esencial sobre la topología de X. Por ejemplo, debido al hecho de que X es conexa, o más exactamente arco conexa, se deduce que $H_0(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

En efecto, todo elemento de $C_0(X)$ está en el núcleo de la aplicación frontera, si $p, q \in X$ son dos elementos cualesquiera de $C_0(X)$ existe una curva γ con $\gamma(0) = p$, y $\gamma(1) = q$. Por tanto $p - q \in C_0(X)$ está en la imagen de δ, puesto que es la frontera de $\gamma \in C_1(X)$. Esto demuestra que $H_0(X,\mathbb{Z})$ es el grupo libre sobre $\mathbb{Z}$ generado por p.

El grupo $H_1(X,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2g}$, donde g es el género de X, clasifica la clase topológica de X. El lector podrá encontrar en las notas de A. Castorena, en este mismo volumen, la definición de género.

6. Lección 5. $Hom_R(N,-)$

Sea R un anillo conmutativo y con 1. Fijemos un $R-$módulo N, a cada $R-$módulo M le asignamos el conjunto de $R-$aplicaciones lineales $N \to M$, este conjunto se denota como $Hom_R(N,M)$, y tiene una estructura de $R-$módulo, definida por la suma y el producto puntuales.

Ejercicio 8. Compruebe que $Hom_R(N,M)$ es un $R-$módulo. Haga notar que la condición R es conmutativo es indispensable para definir la estructura de $R-$módulo.

Para simplificar la notación es conveniente denotar la clase de todos los $R-$ módulos por Mod_R y la asignación anterior por:

$$Hom_R(N,-) : Mod_R \to Mod_R.$$

Esta asignación no sólo define una aplicación entre módulos sino también entre morfismos de módulos. Si

$$f : M_1 \to M_2$$

es una aplicación $R-$lineal definimos

$$f_N : Hom_R(N,M_1) \to Hom_R(N,M_2)$$

por medio de la composición: $f_N(\alpha) = f \circ \alpha$. Es decir $f_N(\alpha)$ hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, "f_N(\alpha)"] & \\ M_1 \arrow[r, "f"] & M_2 \end{tikzcd} .$$

Nos planteamos ahora el siguiente problema, sea

$$M^{\cdot} : 0 \to M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \to 0,$$

una sucesión exacta corta de $R-$módulos. Cuándo es la sucesión:

$$\begin{aligned} Hom_R(N, M^{\cdot}) : 0 \to Hom_R(N, M_1) \xrightarrow{f_{1,N}} \\ \to Hom_R(N, M_2) \xrightarrow{f_{2,N}} Hom_R(N, M_3) \to 0 \end{aligned}$$

exacta?

La respuesta más general que se puede dar a esta pregunta es la siguiente:

Afirmación 1. Si $M^{\cdot}$ es exacta entonces

$$0 \to Hom_R(N, M_1) \xrightarrow{f_{1,N}} Hom_R(N, M_2) \xrightarrow{f_{2,N}} Hom_R(N, M_3)$$

es exacta.

Prueba. Supongamos que $\alpha \in Hom_R(N, M_1)$ es tal que $f_{1,N}(\alpha) = f_1 \circ \alpha = 0$, entonces $Im(\alpha) \subset Ker(f_1) = 0$, puesto que $M^{\cdot}$ es exacta. Por tanto $\alpha = 0$. Esto de muestra que $f_{1,N}$ es inyectiva.

Sea ahora $\beta \in Hom_R(N, M_2)$ un elemento de la imagen de $f_{1,N}$. Esto significa que existe $\alpha \in Hom_R(N, M_1)$ tal que $\beta = f_1 \circ \alpha$. Pero entonces

$$f_{2,N}(\beta) = f_{2,N}(f_1 \circ \alpha) = f_2 \circ f_1 \circ \alpha = 0,$$

puesto que $f_2 \circ f_1 = 0$, por ser $M^{\cdot}$ exacta. Esto demuestra que $Im(f_{1,N}) \subset Ker(f_{2,N})$.

Finalmente, sea $\beta \in Ker(f_{2,N})$. Esto es, $f_2 \circ \beta = 0$. Esto implica que la imagen de $\beta : N \to M_2$ está contenida en el kernel de f_2, pero al mismo tiempo $Ker(f_2) = M_1$, esto es, β factoriza a través de M_1 y por tanto está en la imagen de $f_{1,N}$. ■

Por tanto la respuesta a nuestra pregunta es afirmativa salvo, tal vez, por la exactitud de $Hom_R(N, M^{\cdot})$ en la última flecha, o lo que es lo mismo, por la sobreyectividad de

$$f_{2,N} : Hom_R(N, M_2) \to Hom_R(N, M_3).$$

Fijo N esta aplicación será sobreyectiva para toda $M^{\cdot}$ exacta si y sólo si se cumple la siguiente condición: $\mathbb{P}$: Para todo morfismo sobreyectivo de $R-$módulos:

$$M_2 \to M_3 \to 0,$$

y todo morfismo

$$\gamma : N \to M_3,$$

existe $\gamma' : N \to M_2$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, "\gamma'"'] \arrow[d, "\gamma"] & \\ M_2 \arrow[r] & M_3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} .$$

Lo que motiva la siguiente:

Definición 9 (módulo proyectivo) Un $R-$módulo N se dice proyectivo si satisface alguna de las propiedades equivalentes siguientes:

a) la propiedad $\mathbb{P}$,

b) para toda sucesión exacta corta $M^{\cdot}$ de $R-$módulos la sucesión $Hom_R(N, M^{\cdot})$ también es exacta.

Ejemplo 4. 1. Sea R^n un módulo libre y supongamos que tenemos morfismos:

$$\begin{tikzcd} & R^n \arrow[d, "\gamma"] & \\ M_2 \arrow[r, "f"] & M_3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} .$$

Sea $e_1, ...e_n$ una base de R^n y $m_i := \gamma(e_i)$. Sean $\bar{m}_i \in M_2$ tales que $f(\bar{m}_i) = m_i$. Como R^n es libre la asignación $\beta(e_i) = \bar{m}_i$ define una aplicación $R-lineal$ $\beta : R^n \to M_2$ que por construcción satisface

$$\gamma = f \circ \beta.$$

Es decir, todo módulo libre es proyectivo.

2. Sea $R = \mathbb{Z}$ y consideremos el módulo $\mathbb{Z}_2$ y el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Z}_2 \arrow[d, "id"] & \\ \mathbb{Z} \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde π es el cociente de $\mathbb{Z}$ por $2\mathbb{Z}$. Este diagrama no puede ser completado con un morfismo $\beta : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}$ puesto que $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) = 0$. Esto es, $\mathbb{Z}_2$ no es un módulo proyectivo.

Ejemplo 5. Demuestre que:

a) un módulo M es libre ($\simeq R^n$) si y sólo si tiene una base $e_1, ..., e_n$. Aquí la definición de base es exactamente la misma que en álgebra lineal: un conjunto de generadores linealmente independientes.

b) si M es libre y $e_1, ..., e_n$ es una base todo morfismo $\alpha : M \to N$ se define mediante una asignación $\alpha(e_i) = n_i \in N$. En particular para todo N:

$$Hom_R(R^n, N) \simeq N^n.$$

Ejercicio 9. Demuestre que $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) = 0$.

El último ejemplo nos permite deducir dos razones por la cuáles un módulo puede no ser proyectivo.

Afirmación 2. Sea D un dominio (todo elemento de $D \neq 0$ es regular). Sea M un $D-$módulo finitamente generado y supongamos que existe $m \in M$ tal que m es de torsión, es decir, $m \neq 0$ y para algún $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ $nm = 0$. Entonces M no es proyectivo.

Prueba. La hipótesis M es finitamente generado significa que existe un morfismo sobreyectivo:

$$D^k \to M \to 0,$$

para algún k natural. El mismo argumento usado para demostrar el Problema 9 nos permite concluir que

$$Hom_D(M, D^k) = 0.$$

■

La segunda razón está relacionada con la existencia de extensiones no triviales. Sean M y N $R-$módulos, una extensión no trivial de N por M es una sucesión exacta:

$$0 \to M \to \bar{M} \to N \to 0$$

que no es isomorfa a la extensión

$$0 \to M \to M \oplus N \to N \to 0.$$

Isomorfismo entre extensiones significa que existe un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "id"] & \bar{M} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & N \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 . \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & \bar{M}' \arrow[r] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Tenemos entonces:

Afirmación 3. Sea N un $R-$módulo, supongamos que existe M que admite una extensión no trivial de N por M. Entonces N no es proyectivo.

Prueba. Sea

$$0 \to M \to \bar{M} \xrightarrow{\pi} N \to 0$$

la extensión no trivial y consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & & & N \arrow[d, "id"] & . \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & \bar{M} \arrow[r, "\pi"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Si N es proyectivo existe $\beta : N \to \bar{M}$ tal que $\pi \circ \beta = id$. Del Ejercicio 10 se deduce que la extensión considerada no podría ser no trivial. ■

Ejercicio 10. Sea

$$0 \to M \to \bar{M} \xrightarrow{\pi} N \to 0,$$

una sucesión exacta de $R-$módulos, supongamos que existe $\beta : N \to M$ tal que $\pi \circ \beta = id$. Demostrar que en tal caso $\bar{M} \simeq M \oplus N$ y la extensión definida por la sucesión exacta es trivial.

$Hom_R(N, -)$ es uno de los casos más importantes de lo que se conoce como un funtor (en este caso de la categoría de $R-$módulos en sí misma). Construir a partir de una sucesión exacta

$$M^{\cdot} : 0 \to M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \to 0,$$

otra sucesión que termine en 0 y que tenga por inicio la sucesión:

$$0 \to Hom_R(N, M_1) \xrightarrow{f_{1,N}} Hom_R(N, M_2) \xrightarrow{f_{2,N}} Hom_R(N, M_3) \to \ldots$$

es un problema que involucra la construcción de complejos asociados a la sucesión exacta y el cálculo de sus cohomologías. En esta construcción aparecen de modo natural módulos que parametrizan el conjunto de extensiones no triviales de M_3 por M_1.

Referencias

[1] Kostrikin, A. y Manin, Y. *Linear Algebra and Geometry*. Gordon and Breach, 1997.
◦*Los resultados discutidos en la Lección 1 pueden encontrarse en cualquier texto moderno de Algebra Lineal, pero personalmente recomiendo este texto.*

[2] Ahlfors, L. *Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1953.
◦*Para una introducción a las formas diferenciables, y en particular su relación con la variable compleja*

[3] Springer, G. *Introduction to Riemann Surfaces*, Addison-Wesley, 1957.
◦*Este último texto es también magnífico para tomar un primer contacto con la homología simplicial sobre una superficie de Riemann.*

[4] Rotman, J.J. *An Introduction to Homological Algebra.* Academic Press 1979.
◦*Para los conceptos directamente relacionados con el álgebra homológica, como módulos, complejos y el funtor Hom.*

[5] Eisenbud, D. *Commutative Algebra. With a view toward Algebraic Geometry.* Springer Verlag, 1995.
◦*La discusión en la Lección 4, sección 1 es reproducción de la sección 17.1 de este texto.*