

# Morfología de las Perturbaciones de Densidad: El Origen de las Estructuras Cósmicas

Alejandro González S. \*

*División Académica de Ciencias Básicas  
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco,  
Km 1, Carr. Cunduacán-Jalpa, Cunduacán Tabasco, México  
A.P. 24, C.P. 86690. Tel.(+52)914 336-0928*

---

Se calcula la distribución morfológica de las fluctuaciones primordiales de densidad. Determinaciones previas, han contradictoriamente concluido que existe una tendencia a las formas prolatas, o a las formas oblatas, respectivamente. Utilizando dos métodos, el cálculo del Hessiano y el tensor de inercia hemos calculado el parámetro de triaxialidad de las perturbaciones de densidad en un campo Gaussiano Estocástico con un espectro de ley de potencias, que asemeja el espectro primordial de las fluctuaciones de densidad del Universo. Mostraremos que tal tendencia no existe y que la distribución de triaxialidad es independiente del índice espectral. Más aun, mostraremos que los resultados de Peacock y Heavens son compatibles con nuestras determinaciones. Estos resultados están en completo acuerdo con las triaxialidades inferidas para halos de materia oscura, la morfología de los cúmulos de galaxias e incluso la morfología de los "voids".

We have calculated the morphology distribution of primordial density fluctuations. Previous determinations have reported contradictory results, towards a tendency for prolate or oblate shapes, respectively. By using two methods, the Hessian matrix and the inertia tensor we assess the triaxiality parameter of density perturbations in a Gaussian Random Field with a power law spectrum, which mimics the primordial fluctuation spectrum of the Universe. We will show that there is no preferred tendency, and that the triaxiality is independent of the spectral index. Moreover, we show that the Peacock and Heavens results are compatible with our determinations. These results are in complete agreement with the triaxiality inferred for dark haloes, clusters of galaxies and even with the morphology of voids.

*Palabras Claves: Galaxias, Cúmulos, Morfología, Fluctuaciones de Densidad  
Keywords: Galaxies, Clusters, Primordial Density Fluctuations, Morphology.*

---

## 1. Introducción

Basados en un análisis exhaustivo de las propiedades de los campos Gaussianos estocásticos Bardeen, Bond, Kaiser y Szalay ([1]; BBKS de aquí en adelante) determinaron que las fluctuaciones primordiales de densidad, de las que se origina la actual estructura cósmica son intrínsecamente triaxiales con cierta tendencia a la oblatitud. Otros autores han tratado de detectar alguna interdependencia entre la triaxialidad y el tamaño de las fluctuaciones primordiales de densidad, con la morfología observada de galaxias y cúmulos. Por ejemplo, [2] basado en los resultados de [3], comparó las distribuciones de triaxialidad de las fluctuaciones con la de los halos de materia oscura de simulaciones cosmológicas. Su estudio se enfocaba a analizar la evolución no lineal del campo de densidad, ya que la interacción con otras perturbaciones la morfología

---

\* alegs@basicas.ujat.mx

final podría o no, reflejar la morfología inicial. La hipótesis de partida es que si la forma de las fluctuaciones o picos determina la forma de los halos de materia oscura, debería encontrarse un exceso de halos oscuros prolatos debido al sesgo natural. Sin embargo, no se encontró tal sesgo. Más aun, [4, 5] intentaron explicar el esquema de clasificación de Hubble, asociando galaxias elípticas con las fluctuaciones más grandes, y a las galaxias espirales o de disco con fluctuaciones pequeñas. La relación densidad-morfología de cúmulos de galaxias contradicen esta hipótesis.

Se ha intentado inferir la morfología tridimensional de galaxias y cúmulos a partir de los ejes principales observados, proyectados en el cielo, y realizando simulaciones de Monte Carlo para reproducirlas. [6] por ejemplo, analizaron 204 galaxias elípticas y mostraron que la distribución de triaxialidad era incompatible tanto con una muestra pura de elipsoides oblatos, o de elipsoides prolatos. Se detectó también una fracción pequeña, de  $\approx 2\%$ , de galaxias casi esféricas. Por otra parte, [7] estudiaron una muestra más grande, de 20399 galaxias incluyendo galaxias elípticas y espirales. Confirmaron que el número de galaxias con excentricidad cero son extremadamente raras, y que las galaxias elípticas gigantes y de masa intermedia son triaxiales. No obstante, no se detecta ninguna tendencia hacia la oblatitud o prolaticidad.

En cuanto a cúmulos de galaxias [8] encontraron que los cúmulos de galaxias presentan la tendencia a una excentricidad más grande que las galaxias elípticas, pero además su distribución morfológica es mejor ajustada por una distribución o bien de puros elipsoides oblatos o puros elipsoides prolatos. En tanto, [9] analizó la elipticidad aparente de 44 cúmulos de Abell, encontrando que la distribución morfológica es consistente con formas prolatas. Y empleando una muestra de 6000 cúmulos, [10] concluyen que una distribución de elipsoides triaxiales ajusta mejor los datos observacionales. Tal tendencia ha sido ampliamente estudiada también a través de simulaciones numéricas en escenarios dominados por materia oscura fría por [11, 12].

Resulta claro que no existe consenso sobre la distribución de triaxialidad para las diferentes estructuras cósmicas observadas. Y mientras que varias propiedades estadísticas (.e.g. función de correlación, espectro, etc.) de campos Gaussianos y No Gaussianos han sido exhaustivamente estudiada, e.g. [13, 14, 15, 16], en referencia a la morfología se han detectado inconsistencias entre la forma de los halos predichas por las simulaciones numéricas y de las observaciones. Determinar la morfología de las perturbaciones de densidad generadas como un proceso estocástico, es el objetivo del presente artículo. Una introducción más detallada puede encontrarse en [17]. En el futuro nos avocaremos a seguir la evolución morfológica como resultado de interacciones con otras estructuras en el régimen no lineal que se ha vuelto un tema central en la formación de galaxias [18, 19, 20].

## 2. La Morfología de las fluctuaciones: Formulación teórica

Para el presente análisis adoptaremos el procedimiento analítico y la notación de BBKS. A primera aproximación uno puede expandir el campo de densidad alrededor de un pico (extremo) como

$$\delta(r) = \delta(0) + r_i \frac{\partial \delta(r)}{\partial r_i} + \frac{1}{2} r_i r_j \frac{\partial^2 \delta(r)}{\partial r_i \partial r_j} + \dots, \quad (1)$$

donde el segundo término en el lado derecho de la ecuación es cero debido a la condición de que es un extremo de la función. El término compuesto por las segundas derivadas es la matriz Hessiana

$$H = -\frac{\partial^2 \delta}{\partial r_i \partial r_j}, \quad (2)$$

cuyos eigenvalores, ordenados sin pérdida de generalidad de la forma  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ , representan la aproximación cuadrática del campo de densidad

$$\delta(r) = \delta_0 - \sum \lambda_i r_i^2 / 2, \quad (3)$$

que define un elipsoide triaxial con semiejes

$$a_i = \left[ \frac{2\delta(0) - \delta_t}{\lambda_i} \right]^{1/2}, \quad (4)$$

con  $\delta_t$  definiendo el valor del contorno de isodensidad de la superficie a la que se le determina la triaxialidad. La ecuación (4) es la definición adoptada por PH para analizar la morfología de los picos de densidad en términos de la razón de sus ejes principales.

Adicionalmente, los parámetros de densidad son definidos en términos de los eigenvalores del Hessiano,

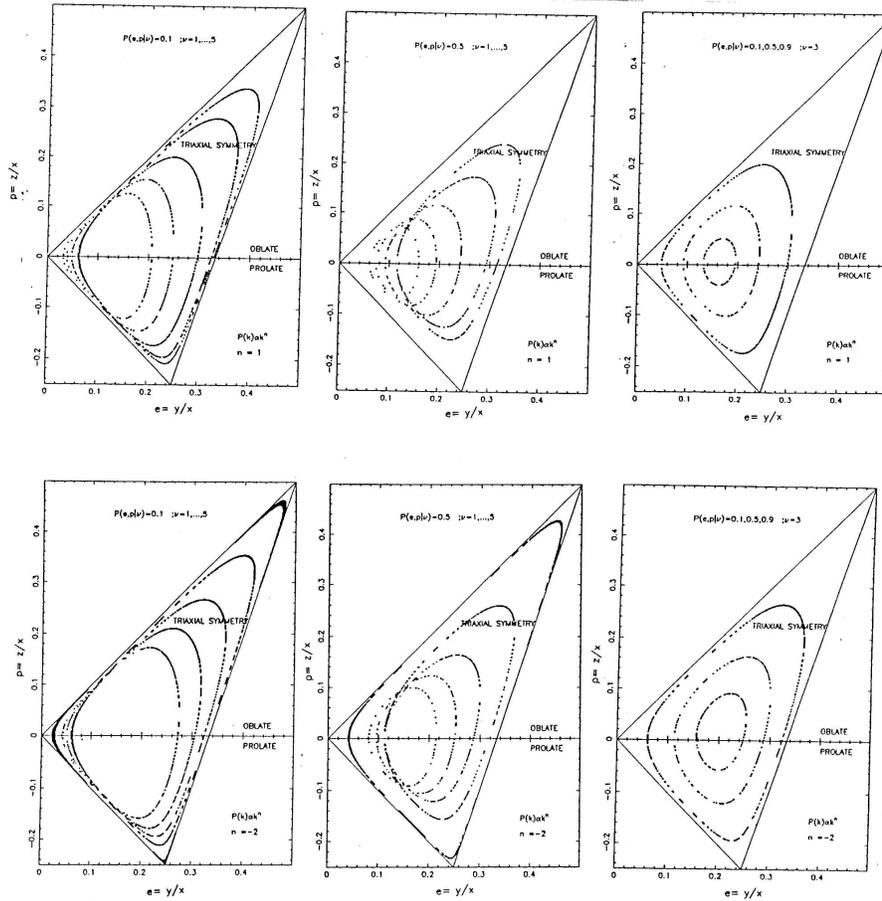
$$\epsilon = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{2 \sum \lambda_i}, \quad p = \frac{\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3}{2 \sum \lambda_i}, \quad (5)$$

donde  $\epsilon$  mide la elipticidad en el plano  $\lambda_1 - \lambda_3$  y  $p$  es el grado de prolatividad u oblatividad, respectivamente. Si  $0 \geq p \geq -\epsilon$ , entonces el elipsoide es prolato, mientras que si  $\epsilon \geq p \geq 0$  es oblato. Los casos límites son,  $p = -\epsilon$  para un esferoide prolato puro y  $p = \epsilon$  para un esferoide oblato puro.

La distribución condicional,  $P(\epsilon, p \| x)$ , que mide la probabilidad de encontrar una fluctuación de densidad con parámetros de triaxialidad en el intervalo  $\epsilon$  y  $p$  y  $\epsilon + d\epsilon$  y  $p + dp$ , condicionada al valor de la curvatura del campo, normalizada  $x = \nabla^2 \delta / \sigma^2$  (ver eq. [7,6] en BBKS) es

$$P(\epsilon, p \| x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{x^8}{f(x)} \exp(-(5/2)x^2(3\epsilon^2 + p^2)) W(\epsilon, p), \quad (6)$$

donde he utilizado  $x = x^* = \gamma\nu$ , que es el valor más probable de la curvatura, y  $\gamma$  es dependiente del índice espectral  $\gamma = [(n+3)/(n+5)]^{1/2}$ . De aquí en adelante, el tamaño o altura de una fluctuación ser expresada en unidades de la raíz cuadrática media  $\sigma$  del campo de perturbaciones como  $\delta = \nu\sigma$ . Así, dada una probabilidad  $P$  y una altura máxima  $\nu_{max}$  de los picos, la ec.(6) define una curva de isoprobabilidad que encierra al menos  $100(1 - P)\%$  de todos los picos con alturas  $\nu < \nu_{max}$ . La Figura 1 exhibe algunos de los contornos de isoprobabilidad como función de la probabilidad y la altura de los picos para los índices espectrales  $n = 1, -2$ . Solo estos índices espectrales fueron incluidos a fin de realzar cualquier posible dependencia de la distribución de la triaxialidad con el espectro. Sin embargo, no se observa ninguna dependencia obvia. Nuestros resultados numéricos deberán ser comparados con los contornos de la Figura 1.



**Figura 1.** Contornos de isoprobabilidad de la distribución de triaxialidad de las fluctuaciones de altura  $\nu$ , para  $n = 1, -2$ . Los isocontornos de probabilidad 0.5 han sido incluidos. Estos deberán contener la mitad del número total de fluctuaciones

### 3. Aproximación Numérica

Hemos calculado tanto el Hessiano como el tensor de inercia para evaluar la morfología primordial de las fluctuaciones de densidad, de las que se originan las estructuras cósmicas a todas las escalas; halos de materia oscura, galaxias, cúmulos de galaxias y estructuras filamentosas. El primer cálculo fue usado por PH para llevar a cabo las primeras determinaciones de la morfología de los picos, mientras que el segundo fue hecho por BBKS en su tratamiento analítico de los campos Gaussianos estocásticos. Ya que nuestro objetivo es probar numéricamente la compatibilidad de estos resultados, ambos métodos requieren de suavizar el campo de densidad discreto, que es generado con fluctuaciones al azar en una caja de  $64^3$  nodos, y un proceso de interpolación en tres dimensiones. Hemos basado este último en el método *triangular-shaped cloud* (ver [21]). Esto nos permite reconstruir el campo de densidad en cualquier punto dentro de la red cúbica. Mas aun, para aplicar eficientemente la interpolación requerimos determinar el número mínimo de puntos que contribuirán al momento de

inercia. Ello para garantizar la estabilidad numérica de la morfología calculada. Para el tensor de inercia hemos asociado una masa unitaria a cada punto de la red. Varias otras formas de asignar la masa pueden ser usados, vea e.g. [22, 23]. Una descripción detallada y completa del uso de los métodos así como la determinación del número mínimo de nodos y pasos de interpolación puede encontrarse [17].  $N_s$  denota el número de subdivisiones de cada  $1^3$  cubo es cruzado por la superficie de isodensidad.

### 3.1 Metodología

Hemos generado el campo de fluctuaciones primordiales con un espectro de ley de potencias,  $P(k) = Ak^n$ , con índices espectrales  $n = 1, 0, -1, -2$ . Los dos primeros corresponden a la descripción de perturbaciones a pequeña escala, del orden de  $kpc$  y los segundos a escalas cosmológicas, de  $Mpc$ . La caja más grande utilizada tiene una escala de longitud de  $64h^{-1}Mpc$  por lado entonces procedemos como sigue:

1. El campo de densidad es convolucionado con un filtro Gaussiano

$$W_G = \exp(-(k^2 R^2)/2), \quad (7)$$

donde  $k$  es el número de onda y  $R$  es el radio de filtrado.

2. Se determina la posición (en la red cúbica) de los máximos. Estos se definen como aquellos puntos sobre la red donde la densidad  $\delta_{max}$  es mayor que la densidad en sus 26 vértices vecinos más cercanos. En general, la posición de los picos máximos en la red no coincide con la verdadera posición del máximo de densidad.
3. El valor de la superficie de isodensidad  $\delta_t$ , para la cual queremos determinar sus parámetros de triaxialidad, es elegido mediante un factor  $f$

$$\delta_t = f\delta_{max}, \quad (8)$$

con  $0 \ll f \leq 1$ . Entonces, el tensor de inercia es calculado

$$I_{kl} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m [(x_k - \langle x_k \rangle)(x_l - \langle x_l \rangle)], \quad (9)$$

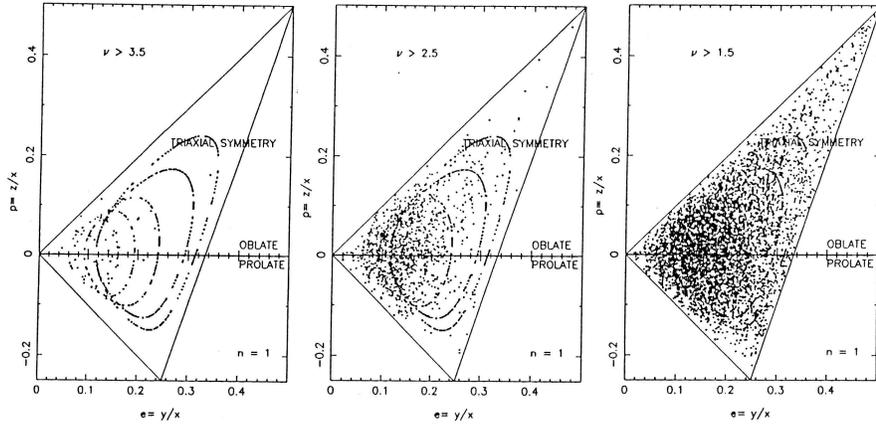
que involucra el uso de los nodos de la red y el código de interpolación de  $N_s = 14$  y donde  $k, l = 1, 2, 3$ ,  $x_{1i}, x_{2i}$  y  $x_{3i}$  son las coordenadas cartesianas del  $i$ -ésimo punto. Para una  $f$  dada, la suma corre sobre todos los nodos de la red con  $\delta \leq \delta_t$ . Los eigenvalores del tensor de inercia  $a_3^2 > a_2^2 > a_1^2$ , son entonces relacionados a los eigenvalores del Hessiano como

$$\lambda_1 = 1/a_1^2, \quad \lambda_2 = 1/a_2^2 \quad \text{y} \quad \lambda_3 = 1/a_3^2. \quad (10)$$

4. Para asegurarnos de la validez de la aproximación cuadrática, el cálculo del Hessiano debe ser hecho muy cerca de la posición del pico real. Por lo tanto, uno de los requerimientos del método del tensor de inercia es llevar a cabo un primer proceso de interpolación para calcular el máximo real. Después de esto, la matriz Hessiana interpolando la densidad en puntos separados a distancias  $d = R/3, R/2, R$  del centro del pico. Estas tres distancias fueron utilizadas para probar la estabilidad y constancia de la forma de los picos de densidad.

## 4. Resultados

### 4.1 Análisis Estadístico



**Figura 2.** Morfología de las fluctuaciones en función de su tamaño para  $n = 1$ . El isocontorno de probabilidad 0.5 contiene 50% del número de picos. Los valores medios de los parámetros de triaxialidad son  $\langle \epsilon \rangle = 0,174$  y  $\langle p \rangle = 2,3 \times 10^{-2}$ .

La Figura 2 muestra la distribución de los parámetros de triaxialidad como función de la altura umbral representada por  $\nu$ . Se confirma que las fluctuaciones más grandes,  $\nu > 3,5$ , tienden a ser más esféricas que las fluctuaciones más pequeñas, tal como lo determinaron BBKS. La mayor dispersión en la morfología de los picos en el plano  $\epsilon - p$ , proviene de los picos con  $\nu < 1,5\sigma$ . Además, la distribución de los parámetros de triaxialidad para los picos con  $1,5 < \nu < 3$ , –donde el número de fluctuaciones es mayor–, está más concentrada hacia la esfericidad y al menos un 50% de ellos caen dentro del contorno de isoprobabilidad. Si analizamos la forma de estos contornos notaremos que la mayor parte del área acotada por ellos está dentro de la región de los esferoides oblatos, indicando una tendencia a estas morfologías. Para checar si esto es correcto, calculamos la razón  $\Gamma$  entre el número de elipsoides oblatos  $N_o$  al de elipsoides prolatos  $N_p$ , ambos obtenidos numericamente. Cualquier tendencia debe ser reflejada por  $\Gamma$ . En la segunda y tercer columna de la Tabla 1 mostramos esta razón para diferentes índices espectrales y en función del tamaño de las fluctuaciones. Es fácilmente visible que no hay ninguna tendencia morfológica. Más aún, cuando solo consideramos los picos más altos, tampoco se observó ninguna morfología preferencial, aun cuando constituyen una población pequeña.

El histograma de la Figura 3, despliega la distribución de elipsoides oblatos y prolatos. Debido a estos resultados, nuestra primer conclusión es que la forma intrínseca de las fluctuaciones primordiales de densidad es triaxial. Una inspección de la Figura 3 también confirma que los resultados son independientes del índice es-

Shapes of Density peaks			
Spectral index n	1 <sup>st</sup> Realization (Inertia Tensor) $\Gamma = N_o/N_p$	2 <sup>nd</sup> Realization (Inertia Tensor) $\Gamma = N_o/N_p$	3 <sup>th</sup> Realization (Hessian) $\Gamma = N_o/N_p$
<i>n</i> = 1			
$\nu > 3.5$	110/105	112/111	104/101
$\nu > 2.5$	499/495	502/506	503/498
$\nu > 1$	3140/3144	3093/3092	3098/3101
$\nu > 0$	3283/3276	3337/3341	3305/3306
<i>n</i> = 0			
$\nu > 3.5$	93/95	113/109	107/102
$\nu > 2.5$	413/409	402/410	423/417
$\nu > 1$	2527/2512	2314/2321	2323/2321
$\nu > 0$	2687/2693	2498/2475	2548/2539
<i>n</i> = -1			
$\nu > 3.5$	70/68	73/76	69/72
$\nu > 2.5$	297/305	305/308	313/309
$\nu > 1$	1789/1797	1810/1797	1805/1812
$\nu > 0$	2057/2048	2023/2026	2063/257
<i>n</i> = -2			
$\nu > 3.5$	37/32	42/41	38/41
$\nu > 2.5$	153/158	165/163	157/155
$\nu > 1$	1071/1083	1112/1096	1086/1083
$\nu > 0$	1386/1394	1367/1356	1352/1343

**Cuadro 1.** Cociente del número de objetos oblatos a prolotos en función del índice espectral *n* y la altura de los picos. Se indica el método utilizado

pectral. Sin embargo, la distribución de elipticidad y prolatividad exhibe una débil tendencia hacia las morfologías oblatas. Los valores medios  $\langle \epsilon \rangle = 0,18 \pm 0,02$  y  $\langle p \rangle = (0,13 \pm 0,003) \times 10^{-3}$  incluyen a todos los modelos. Estos valores y la distribución de puntos en el plano  $\epsilon - p$  desacuerdan tanto con las predicciones analíticas de BBKS, como con el análisis numérico de PH. Así, para comparar nuestros resultados con el de estos autores es necesario calcular la morfología recurriendo al Hessiano, como se describió en la sección 3. Una vez que el Hessiano es diagonalizado tomamos el cociente de sus ejes definidos por la Ec. (10)

$$\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{1/2} = \frac{a_1}{a_3} = \frac{\text{short - axes}}{\text{long - axes}} = s, \tag{11}$$

$$\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^{1/2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{\text{middle - axes}}{\text{long - axes}} = m. \tag{12}$$

La Figura 4 es un ejemplo de la distribución de estos cocientes en el plano  $s - m$ . Un simple juicio

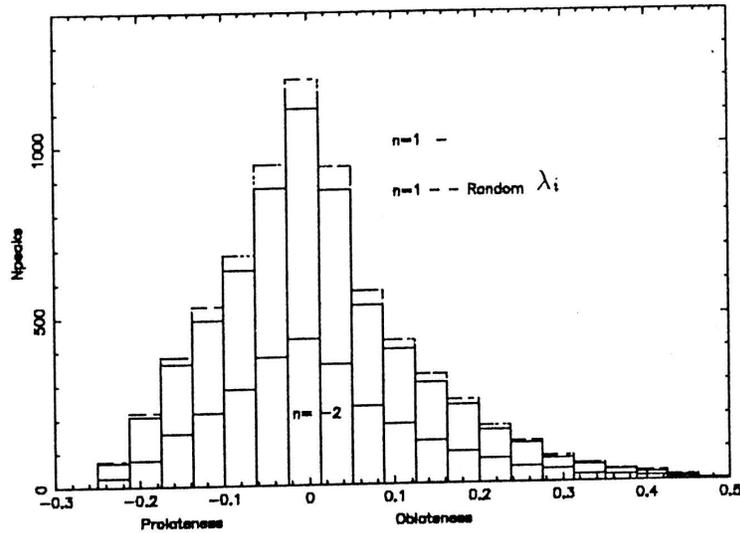
$$\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0, \tag{13}$$

o en términos del cociente de los ejes

$$\frac{1}{s^2} - \frac{2}{m^2} + 1 = 0, \tag{14}$$

que nos da la ecuación de la curva

$$s = \frac{m}{\sqrt{2 - m^2}}. \tag{15}$$



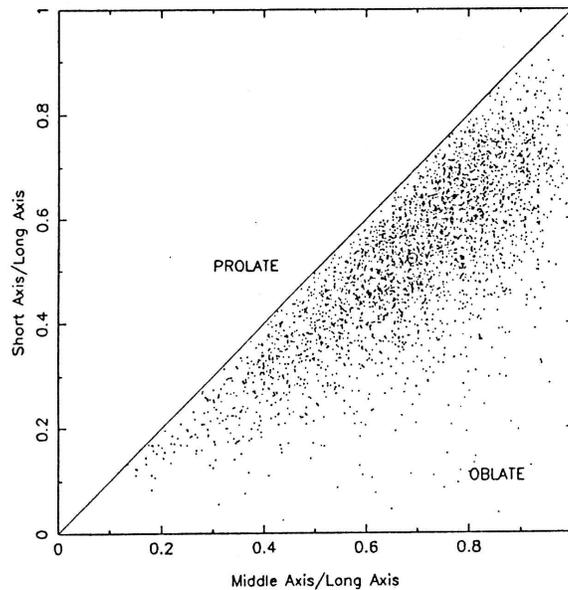
**Figura 3.** Distribución de formas oblatas y prolatas de la Tabla 1. La distribución en línea punteada corresponde a los eigenvalores generados al azar.

Cuando esta función es incluida en el diagrama  $s-m$  de la Figura 4, se observa que los resultados de Ph son también consistentes con que no se detecta ninguna tendencia morfológica, i.e. las perturbaciones son intrínsecamente triaxiales como lo muestran tanto el número de elipsoides oblatos y prolatos de la Figura 5, así como la cuarta columna de la Tabla I. Regresando a los resultados de BBKS, uno quisiera entender por qué existiría un *sesgo natural* hacia las formas oblatas?

#### 4.2 Generación Estocástica de $\lambda_i$

El campo primordial de fluctuaciones es un campo Gaussiano estocástico ([25, 24]), i.e. es un campo generado por la superposición de una gran número de modos de Fourier con fases al azar en un intervalo  $0-2\pi$ . Bien, observando lo que es una fluctuación desde el punto de vista de la matriz Hessiana, ésta es el resultado de la curvatura del campo de densidad sobre sus ejes principales. Los eigenvalores del Hessiano, por lo tanto deben ser también números generados al azar; el valor de uno no afecta el valor de los otros dos. Bajo esta suposición, no resulta claro por qué o de dónde deba surgir una tendencia hacia las formas oblatas. Es también bajo esta suposición que hemos generado números al azar para generar tripletes, incluso sin prestar atención a si reúnen los requerimientos de un campo cosmológico de densidad. Son tripletes de números generados al azar. Con este procedimiento tenemos el objetivo de tratar de reproducir nuestra distribución de triaxialidad como un proceso estocástico. Si sucede tal cosa, sería indicativo de que la tendencia reportada por BBKS resulta más bien de las varias simplificaciones analíticas hechas, que esconden la distribución real de triaxialidad.

Llamaremos a nuestros tripletes, eigenvalores, tales que  $0 < \lambda_i \leq 1$ . Una vez que los ordenamos en forma creciente, determinamos los parámetros de triaxialidad

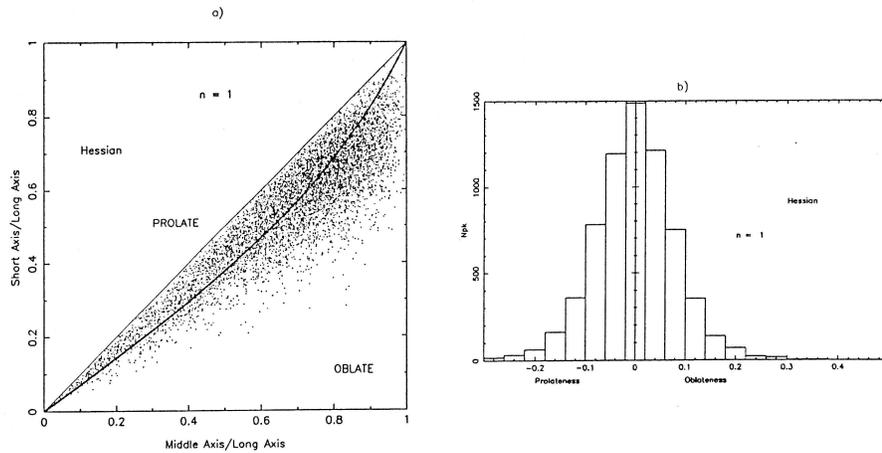


**Figura 4.** Distribución de picos de acuerdo al cociente de sus ejes  $s$  y  $m$ , como fueron presentados por PH. Se observa una tendencia artificial a las formas prolatas.

a través de la Ec. (5). Los resultados son desplegados en la distribución de la Figura 3 (línea punteada), en donde no se observa diferencias substanciales con las distribuciones obtenidas con el Hessiano ni con el tensor de inercia. Incluso podemos proveer una medida de que tan iguales son estas distribuciones recurriendo a los momentos; la media  $\langle p \rangle$ , la desviación estándar  $\sigma$ , el sesgo  $s$  y la curtosis  $k$ . Tales momentos caracterizan la asimetría observada de la distribución de triaxialidad. Nosotros obtuvimos:  $\langle p \rangle = 1,324 \times 10^{-2}$ ,  $\sigma = 0,1189$ ,  $s = 0,9091$  y  $k = 0,9364$ . Mientras que para la distribución determinada por la generación azarosa de tripletes, obtenemos  $\langle p \rangle = 8,53 \times 10^{-3}$ ,  $\sigma = 0,1194$ ,  $s = 0,9251$  y  $k = 0,9635$ . Y por tanto estas dos distribuciones son generadas por el mismo proceso estocástico.

## 5. Conclusiones

Para todos los índices espectrales, confirmamos que los picos de densidad más altos tienden a ser más esféricos. Cuando se considera la muestra completa de perturbaciones, se detecta una morfología intrínsecamente triaxial. Este resultado resuelve una controversia concerniente a sesgo natural inicial hacia la prolaticidad por PH, o hacia la oblatitud. Nuestros resultados son independientes del índice espectral. Más aun, las determinaciones de las formas intrínsecas de galaxias elípticas de [6, 7], que fueron consistentes con una población de objetos triaxiales, sugiere que la distribución de morfologías sobrevive a la evolución no lineal del campo.



**Figura 5.** (a) Distribución de triaxialidad de los picos en el plano  $s - m$ , como fueron presentados por PH. Se observa una tendencia artificial a las formas prolatas. En la Figura (b) se incluye la función  $s = s(m)$  que divide correctamente ambas regiones. Se comprueba que no hay tal sesgo morfológico natural

## Referencias

- [1] Bardeen J.M., Bond R., Kaiser N., y Szalay R., 1987. *ApJ* **304**, 15.
- [2] Dubinski J., 1992. *ApJ* **401**, 441.
- [3] Peacock J.A. y Heavens, A. *MNRAS* **217**, 805. 1985.
- [4] Evrard A.E., 1989. *ApJ* **341**, 26.
- [5] Evrard A.E., Silk J., y Szalay A., 1990. *ApJ* **365**, 13.
- [6] Fasano G. y Vio R., 1991. *MNRAS* **249**, 629.
- [7] Lambas D.G., Maddox S. y Loveday J., 1992. *MNRAS* **258**, 404.
- [8] Carter D. y Metcalfe N., 1980. *MNRAS* **191**, 325.
- [9] Binggeli B., 1982. *A&A* **107**, 338.
- [10] Plionis M., Barrow J.D. y Frenk C.S., 1989. *MNRAS* **249**, 662.
- [11] Efstathiou G., White S., Frenk C.S. y Davis M., 1985. *Nature* **317**, 595.
- [12] Frenk C.S., White S., Davis M. y Efstathiou G., 1988. *ApJ* **227**, 507.
- [13] Couchmann H.M.P., 1987. *MNRAS* **225**, 777.
- [14] Barrow J.D. y Coles P., 1987. *MNRAS* **228**, 407.
- [15] Barrow J.D. y Coles P., 1990. *MNRAS* **244**, 557.
- [16] Coles, P., 1989. *MNRAS* **238**, 319.
- [17] González A. Tesis doctoral. Universidad de Sussex, 1995.

- [18] Hernández-Toledo, H., Avila-Reese, V., Conselice, C.J. y Puerari, I. 2005. ApJ **129**, 682.
- [19] Hernández-Toledo, H., Avila-Reese, V., Salazar-Contreras, J.R. y Conselice, C.J. 2006. ApJ **132**, 71.
- [20] Saintonge, A., Schade, D., Ellingson, E. et al. 2005. ApJ **157**, 228.
- [21] Hockney, R.W. y Eastwood, J.W.. Computer Simulations Using Particles. Institute of Physics Publishing, 1988. ISBN 0-85274-392-0. Gran Bretaña, 1999.
- [22] West, M., 1989. ApJ **344**, 535.
- [23] West, M., 1989b. ApJ **347**, 610.
- [24] Aarseth S.J., 1978. MNRAS **185**, 227.
- [25] Adler, R.J. The Geometry of Random Fields. Ed. John-Wiley and Son, 1981.