

Determinación de órbitas periódicas usando el método ciclos lentos rápidos

Manuel Fidel Domínguez Azueta *, Gamaliel Blé González

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, México

Recibido 6 de febrero 2015. Aceptado 25 de mayo 2015

Una herramienta muy importante que permite determinar los ciclos límite en un sistema de ecuaciones diferenciales, está basada en los ciclos lentos rápidos. En este trabajo se muestra la aplicación que tiene esta teoría, haciendo todos los cálculos para determinar el ciclo límite en la ecuación de Van der Pol.

A very important tool to determine the limit cycles in a system of differential equations is based on the fast-slow cycles. In this work, we apply this theory doing all the calculations to determine the limit cycle in the Van der Pol equation.

Palabras Clave: Ciclos lentos rápidos, sistemas no lineales, ciclos límite.

1. Introducción

Es conocido que resolver analíticamente (a la Cauchy) una ecuación diferencial no lineal

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

es un problema difícil y la mayoría de las veces sin solución, por lo que se han desarrollado métodos alternativos, basados en herramientas analíticas, geométricas y numéricas que permiten entender el comportamiento cualitativo de las soluciones, [5]. Una de las preguntas interesantes en el estudio cualitativo es determinar el comportamiento asintótico de las soluciones y para ello es necesario analizar la dinámica alrededor de los puntos de equilibrio y las órbitas periódicas, [1].

Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se llama un *punto de equilibrio* o punto crítico de (1) si $f(x_0) = 0$. Un punto de equilibrio x_0 se llama *punto de equilibrio hiperbólico* de (1) si ninguno de los valores propios de la matriz de $Df(x_0)$ tiene parte real cero.

Si $E \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $f \in \mathcal{C}^1(E)$, por el teorema de Taylor,

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + H(x, x_0),$$

en una vecindad $V \subset E$ de x_0 . Esto implica que la función lineal $Df(x_0)x$ es una buena aproximación lineal a la función no lineal $f(x)$ cerca del punto de equilibrio

***Dirección postal:** Carr. Cunduacán-Jalpa Km 1, Cunduacán Tabasco, México. A.P. 24 C.P. 86690. Tel.(+52)914 336-0928. **Correo electrónico:** mfideld@gmail.com

x_0 y trasladando a cero, es razonable esperar que el comportamiento del sistema no lineal (1) sea equivalente al sistema lineal,

$$\dot{y} = Df(x_0)y. \quad (2)$$

Al sistema (2) se le llama *linealización* de (1) en $x_0 = 0$. De hecho el teorema de Hartman-Grobman nos garantiza que cuando el punto de equilibrio es hiperbólico, entonces la dinámica local del sistema no lineal y de su linealización coinciden, [5].

Si $\phi_t(x)$ denota la solución a la ecuación diferencial (1), que al tiempo $t = 0$ pasa por x_0 denotamos

$$\Gamma_{x_0} = \{x \in E \mid x = \phi_t(x_0) \ t \in \mathbb{R}\},$$

y le llamamos *trayectoria* de (1) que pasa por x_0 .

$$\Gamma_{x_0}^+ = \{x \in E \mid x = \phi_t(x_0), \ t \geq 0\},$$

es la *trayectoria positiva* a través del punto x_0 y

$$\Gamma_{x_0}^- = \{x \in E \mid x = \phi_t(x_0), \ t \leq 0\},$$

es la *trayectoria negativa*. En resumen, cualquier trayectoria $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$.

Un punto $p \in E$ es un punto ω -límite de la trayectoria $\phi_t(x)$ del sistema (1), si existe una sucesión $t_n \rightarrow \infty$ de tal manera que

$$\lim_{t_n \rightarrow \infty} \phi_{t_n}(x) = p.$$

De manera similar, si existe una sucesión $t_n \rightarrow -\infty$ tal que

$$\lim_{t_n \rightarrow -\infty} \phi_{t_n}(x) = q,$$

y el punto $q \in E$, entonces al punto q se le llama punto α -límite de la trayectoria $\phi_t(x)$ de (1).

Al conjunto de todos los puntos ω -límite de una trayectoria Γ se le llama conjunto ω -límite de Γ y se denota por $\omega(\Gamma)$. De igual manera, se tiene el conjunto α -límite de Γ y se denota por $\alpha(\Gamma)$.

Una *órbita periódica* Γ del sistema (1), es cualquier curva cerrada solución del sistema (1) que no es un punto de equilibrio del sistema (1). Un *ciclo límite* Γ de un sistema planar es una órbita periódica de (1) el cual es el α u ω -límite de alguna trayectoria de (1) que no sea Γ , (véase la figura 1).

En este trabajo presentamos con detalles la teoría de ciclos lentos rápidos desarrollada en los trabajos de Dumortier y Roussarie, la cual permite determinar la existencia de ciclos límite y con el fin de mostrar su aplicación, la implementaremos en la ecuación de Van der Pol, [3, 2].

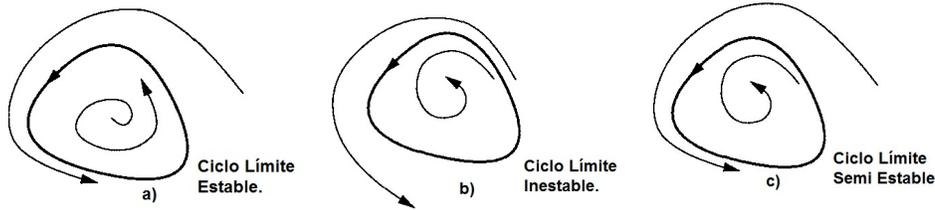


Figura 1. Ciclos límite a) Estable b) Inestable c) Semi estable.

2. Determinación de órbitas periódicas

En esta sección trabajaremos con campos vectoriales que presentan bifurcaciones en las cuales es posible observar órbitas periódicas. Para detectar el número de órbitas periódicas que pueden presentarse haremos uso del concepto de lento rápido, el cual definiremos con precisión en los siguientes apartados.

2.1 Campos vectoriales lentos rápidos

Sea M una superficie diferenciable, orientable y sin frontera. Sea $X_{\lambda,\epsilon}$ una familia de campos vectoriales diferenciables sobre M , definido para $\epsilon \in [0, \epsilon_1]$ (para un determinado $\epsilon_1 > 0$) y para $\lambda \in \Lambda$. Donde Λ es un subconjunto compacto del plano.

Definición 1. Un campo $X_{\lambda,\epsilon}$ es de tipo lento-rápido con parámetro singular $\epsilon > 0$, si existe una λ -familia de variedades diferenciables S_λ (curvas), formada por puntos singulares del campo $X_{0,\lambda}$.

Observemos que S_λ en general puede ser un subconjunto de los puntos críticos del campo $X_{0,\lambda}$ y que no necesariamente S_λ es conexo. De hecho el conjunto de puntos críticos $X_{0,\lambda}$ puede estar formado por diferentes componentes, (curvas críticas). A estas curvas críticas se les llama **curvas lentas**.

Sobre una curva lenta la dinámica está determinada por la dirección de la otra componente del campo cuando $\epsilon > 0$, la cual induce una dirección de movimiento sobre la curva crítica a esto se le conoce como la **dinámica lenta**.

Definición 2. Un punto $p \in S_\lambda$, punto crítico de $X_{0,\lambda}$, se denomina normalmente hiperbólico (que puede ser atractor o repulsor), si la parte lineal de $X_{0,\lambda}$ en p tiene un valor propio distinto de cero (respectivamente negativo o positivo). Si los dos valores propios tienen parte real cero decimos que p es un **punto de contacto**. En ese caso, se distingue entre un punto de contacto nilpotente si $D(x_0, \lambda)$ en p es nilpotente y un punto de contacto degenerado si $D(x_0, \lambda)$ en p es cero.

Ejemplo 1. En el sistema de Van der Pol

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + x - \frac{1}{3}x^3 \\ \dot{y} &= -\epsilon x. \end{aligned} \tag{3}$$

Se tiene una curva crítica la cual contiene dos puntos de contacto y los otros puntos son normalmente hiperbólicos, (véase la figura 2).

Cuando $\epsilon = 0$, el sistema presenta una λ -familia de curvas críticas, determinadas por la ecuación

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x.$$

La parte lineal del sistema para $\epsilon = 0$, está dada por

$$\begin{pmatrix} 1 - x^2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto si $1 - x^2 \neq 0$, estamos en los puntos normalmente hiperbólicos y si $1 - x^2 = 0$, obtenemos los puntos de contacto. Resolviendo obtenemos que los puntos de contacto son ± 1 , donde -1 es un máximo y 1 es un mínimo. Estos puntos son nilpotentes de segundo orden, ya que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, si $\epsilon > 0$ obtenemos que la componente vertical del campo sobre la curva crítica apunta hacia abajo cuando $x > 0$ y hacia arriba cuando $x < 0$ por lo que el flujo lento apunta hacia abajo a la derecha de cero y hacia arriba a la izquierda de cero, (véase la figura 2 y 3).

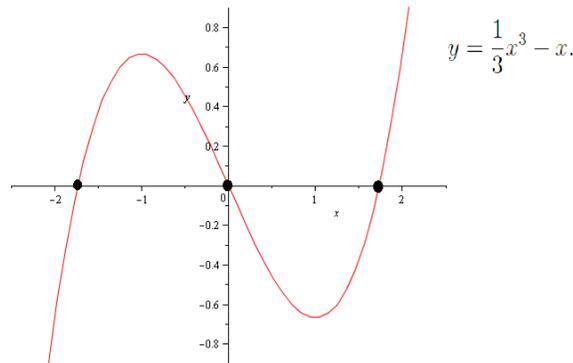


Figura 2. Curva crítica de la ecuación de Van der Pol.

Para el análisis de las dinámicas que se generan al variar el parámetro ϵ , es importante considerar la forma normal que presenta la ecuación diferencial alrededor de un punto de contacto nilpotente. Para ello citamos el siguiente resultado, el cual puede ser consultado en [6].

Proposición . Sea $X_{\epsilon,\lambda}$ un sistema lento rápido diferenciable sobre una superficie diferenciable M . Si p un punto de contacto nilpotente para el parámetro $\lambda = \lambda_0$, entonces existe un cambio de coordenadas (x, y) , tal que $p = (0, 0)$ y módulo la multiplicación por una función diferenciable estrictamente positiva, el sistema $X_{\epsilon,\lambda}$ es C^∞ equivalente a la siguiente forma normal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - f(x, \lambda) \\ \dot{y} &= \epsilon(g(x, \epsilon, \lambda) + (y - f(x, \lambda))h(x, y, \epsilon, \lambda)), \end{aligned} \tag{4}$$

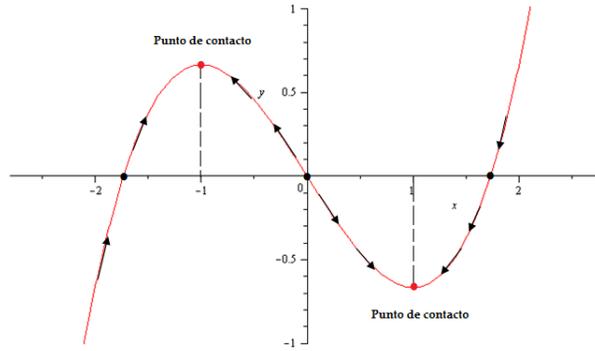


Figura 3. Dinámica lenta en la ecuación de Van der Pol.

donde las funciones f , g y h son diferenciables en una vecindad de $(0, 0, 0, \lambda_0)$ y $f(0, \lambda_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, \lambda_0) = 0$.

En el caso de la ecuación de Van der Pol (3), haciendo el cambio de coordenadas $(X, Y) = (x - 1, y + \frac{2}{3})$, el cual nos traslada el punto de contacto $(1, -\frac{2}{3})$ al origen, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + x^2 - \frac{1}{3}x^3 \\ \dot{y} &= -\epsilon(x - 1). \end{aligned} \tag{5}$$

Por lo que su forma normal corresponde a $f(x, \lambda) = x^2 - \frac{1}{3}x^3$, $g(x, \epsilon, \lambda) = -(x - 1)$ y $h(x, y, \epsilon, \lambda) = 0$.

Definición 3. Un punto de contacto nilpotente de $X_{0,\lambda}$ es regular si

$$g(0, 0, \lambda_0) \neq 0.$$

Es de orden finito cuando existe un $n \geq 2$ (llamado el orden de la singularidad nilpotente) tal que

$$f(x, \lambda_0) = cx^n + \mathcal{O}(x^{n+1}), \text{ para } c \neq 0 \text{ y } x \text{ cerca de cero.}$$

Un punto de contacto nilpotente se llama singular cuando $g(0, 0, \lambda_0) = 0$.

Definición 4. Un punto de contacto nilpotente singular p tal que $\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0, \lambda_0) \neq 0$, tiene índice ± 1 , si

$$\text{sign} \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0, \lambda_0) = \mp 1.$$

Por ejemplo en la ecuación de Van der Pol (5) obtenemos que el punto de contacto correspondiente a $(1, -\frac{2}{3})$ es regular. De la misma manera se obtiene que $(-1, \frac{2}{3})$ es un punto de contacto regular.

2.2 Ciclos lentos-rápidos

Sea

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= \epsilon g(x, y),\end{aligned}\tag{6}$$

un sistema que depende de un parámetro ϵ . Cuando $\epsilon = 0$, la segunda ecuación es igual a cero por lo que el campo vectorial no tiene componente vertical. A esta ecuación se le llama *ecuación de capa*. En este sistema las cero-clinas vienen dadas por las raíces de $f(x, y) = 0$.

Definición 5. Un ciclo lento-rápido de una ecuación de capa es una curva cerrada simple, unión de trayectorias regulares (arcos horizontales en el complemento de la curva lenta) y arcos en la curva lenta (arcos críticos). Además, la curva debe admitir una orientación compatible con la orientación natural de las órbitas rápidas y con la orientación de la dinámica lenta, (ver figura 4).

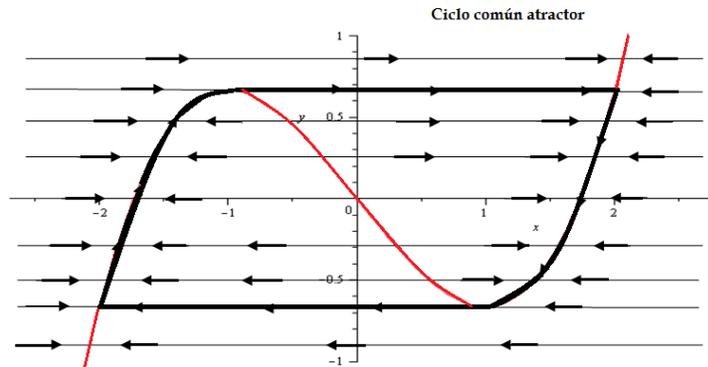


Figura 4. Ciclo lento-rápido para la ecuación de Van der Pol.

Definición 6. Un ciclo lento-rápido de una ecuación de capa es común, si todos los arcos críticos son del mismo tipo. En particular, es **atractor**, **repulsor**, si puntos cerca de los arcos críticos son atraídos o rechazados (ver figuras 4, 5).

Definición 7. Un ciclo lento-rápido que contiene arcos críticos de diferentes tipos, se denomina ciclo engañoso, (ver figura 6), [2].

Definición 8. Un **ciclo lento-rápido regular** es un ciclo lento-rápido sin singularidades en los arcos lentos y tal que sus puntos de contacto son regulares.

A los segmentos lento-rápido del tipo engañoso rápido-rápido (véase la figura 7) y engañoso rápido-lento (véase la figura 8) se denominan segmentos lento-rápido de tipo engañoso, a pesar de que estos segmentos pueden ser parte de un ciclo común. A los segmentos lento-rápido que no son del tipo engañoso se les llama segmentos lento-rápido fuertemente común.

Definición 9. Un **ciclo lento-rápido fuertemente común** es un ciclo lento-rápido común regular que solo contiene segmentos lento-rápido fuertemente común (y

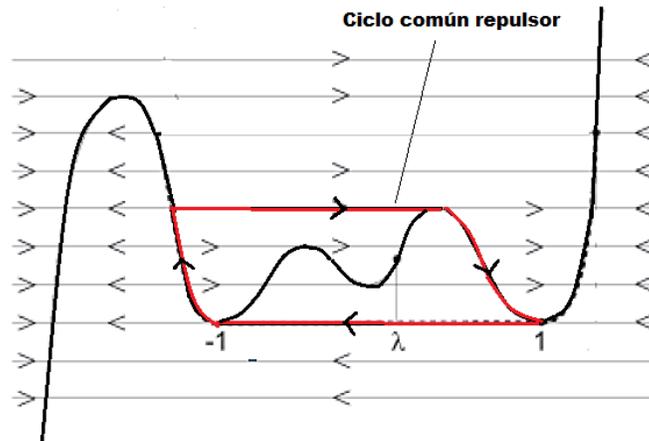


Figura 5. Ciclo lento-rápido común para la ecuación $\dot{x} = y - F(x), \dot{y} = 0$.

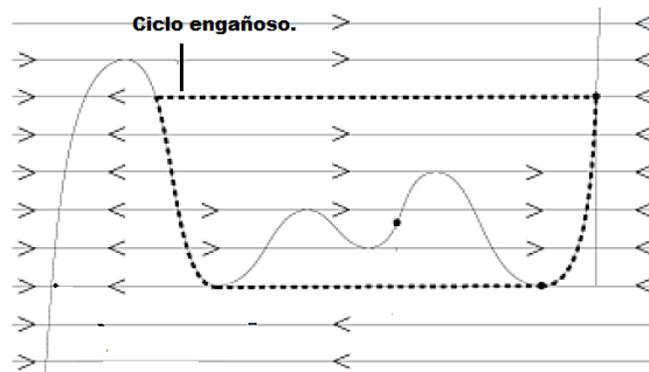


Figura 6. Ciclo engañoso para la ecuación $\dot{x} = y - F(x), \dot{y} = 0$.

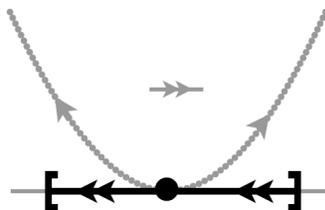


Figura 7. Segmento engañoso rápido-rápido

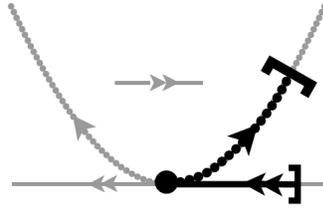


Figura 8. Segmento engañoso rápido-lento

por ello carece de segmentos lento-rápido de tipo engañoso.)

Para terminar la sección enunciamos el siguiente resultado el cual permite determinar ciclos límites en un sistema de ecuaciones diferenciales en el plano. La demostración de este teorema puede ser consultada en [6].

Teorema 1. Si existe $\lambda_0 \in \Lambda$ y tal que el sistema X_{ϵ, λ_0} tiene un ciclo lento rápido fuertemente común Γ , entonces existe un $\epsilon_0 \in (0, \epsilon_1]$, una vecindad $\Lambda_0 \subset \Lambda$ de λ_0 y una vecindad \mathcal{T} de Γ de tal manera que para $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ y $\lambda \in \Lambda_0$ el campo vectorial $X_{\epsilon, \lambda}$ tiene un único ciclo límite hiperbólico en \mathcal{T} . Además, este ciclo límite tiende a Γ en la métrica de Hausdorff, cuando (ϵ, λ) tiende $(0, \lambda_0)$.

Ahora aplicaremos este resultado a la ecuación de Van der Pol.

Corolario. El sistema de Van der Pol (3) tiene un único ciclo límite hiperbólico.

Prueba. (Corolario). El ciclo lento rápido generado para la ecuación de Van der Pol del ejemplo 1 es un ciclo que contiene dos puntos de contacto regulares por lo que es un ciclo lento rápido fuertemente común (atractor). Del teorema 1 concluimos que el sistema tiene un único ciclo límite hiperbólico atractor, (véase la figura 9). ■

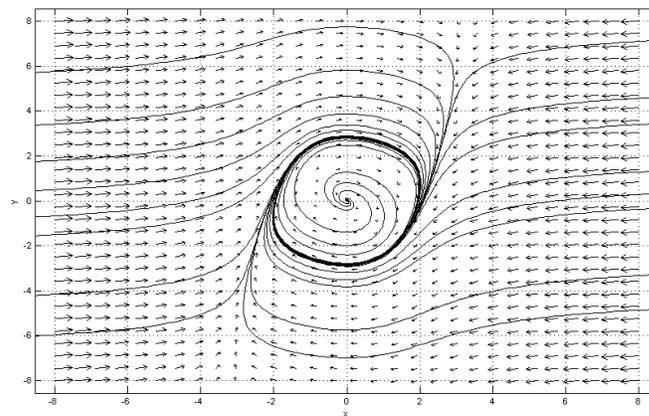


Figura 9. Ciclo límite hiperbólico atractor para el sistema de Van der Pol (3).

3. Conclusión

Basado en el trabajo de Dumortier, Panazzolo y Roussarie publicado en 2007, [3] y utilizando como herramienta la teoría de ciclos lentos-rápidos hemos podido mostrar en este trabajo que la ecuación de Van der Pol tiene un único ciclo límite hiperbólico y además es estable (atractor).

Ahora la pregunta de por qué se estudian los ciclos límite es muy importante de responder esto porque en realidad tienen muchas aplicaciones sobre todo en los modelos biológicos ya que la existencia de un ciclo límite en un modelo biológico es garantizar la coexistencia de las dos especies, si se trabaja con un modelo (depredador-presa) en el plano.

Referencias

- [1] V.I. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [2] F. Dumortier, R. Roussarie, *Bifurcation of relaxation oscillations in dimension 2*, to appear in *Discr. and Cont. Dyn. Sys.* (2007).
- [3] F. Dumortier, D. Panazzolo and R. Roussarie, *More limit cycles than expected in Liénard systems*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **135** (2007), 1895 – 1904.
- [4] A. Lins, W. de Melo and C.C. Pugh, *On Liénard's Equation*, *Lecture Notes in Math* **597**, Springer, Berlin, (1977), pp. 335 – 357.
- [5] L. Perko, (2000). *Differential Equations and Dynamical Systems*, Third Edition, Springer, New York.
- [6] P. De Maesschalck, F. Dumortier y R. Roussarie., *Cyclicity of common slow - fast cycles*, *Indagationes Mathematicae* 22 (2011) 165 – 206.