



Ondas viajeras en Coordenadas Cilíndricas Circulares

José Adán Hernández Nolasco^{1,*}, Gerardo Arceo Moheno¹ y Sabino Chávez Cerda²

¹ División Académica de Informática y Sistemas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

²Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica, Puebla, México

*adan.hernandez@ujat.mx

Resumen

Las ondas propagantes o viajeras deben de satisfacer la condición de radiación de Sommerfeld, en este artículo presentamos la solución fundamental de la ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas circulares, que cumple con esta condición. Así mismo realizamos la representación correcta de este sistema de coordenadas congruente con su definición y características.

Palabras claves: Solución fundamental, ondas viajeras, ecuación Helmholtz.

Abstract

The traveling waves must satisfy the radiation condition of Sommerfeld, in this paper we present the fundamental solution of the Helmholtz equation in circular cylindrical coordinates, that satisfying this condition. We also do the correct representation of this coordinate system consistent with its definition and characteristics.

Keywords: Fundamental Solution, traveling waves, Helmholtz equation.

Recibido: 13 feb 2016. Aceptado: 11 mayo 2016, FECHA DE ACEPTADO. 30 mayo 2016.

1. Introducción

En el estudio de la radiación electromagnética se tienen dos elementos fundamentales que permiten comprender de forma apropiada este fenómeno físico, el sistema de coordenadas tridimensional de referencia y la ecuación de onda que se utiliza para obtener las funciones que representan la propagación de ondas. Para el caso del sistema de coordenadas nos enfocamos exclusivamente al sistema cilíndricas circulares, en de los más conocidos y utilizados. Este es apropiado para el estudio de ondas electromagnéticas en una guía de onda cilíndrica, modos de vibración de membranas circulares delgadas, modos transversales electromagnéticos en guías ópticas, solo por mencionar algunas aplicaciones.

Para el caso de la ecuación que describe la propagación de ondas electromagnéticas es la ecuación escalar de Helmholtz [1,2,3].

$$\nabla^2 E + \kappa^2 E = 0 \quad 1)$$

donde E es en campo eléctrico, ∇^2 es el Laplaciano en las coordenadas espaciales x, y y z ; $\kappa = \frac{\omega}{c}$ es el número de onda, ω es la frecuencia angular y c es la velocidad de la luz. Esta es una ecuación diferencial parcial que resulta de separar los componentes espaciales de la ecuación de onda de la componente temporal, la dependencia temporal tiene solución armónica $e^{-i\omega t}$. La ecuación de Helmholtz es separable en once sistemas de coordenadas: Rectangulares, Cilíndricas circulares, Cilíndricas Elípticas, Cilíndricas Parabólicas, Esféricas, Esferoidales Alargadas, Esferoidales Achatadas, Parabólicas, Cónicas, Paraboloidales y Elipsoidales [3,4]. La utilización de estos sistemas dependerá de las características geométricas del problema a tratar y de las condiciones de frontera, por ejemplo para estudiar la propagación de luz en una fibra óptica se utilizan las coordenadas cilíndricas circulares, debido a la forma cilíndrica circular de la fibra.



2. Sistema de coordenadas cilíndrico circular

Los sistemas de coordenadas ortogonales pueden ser determinados por sus métricas h_1 , h_2 y h_3 , también llamados factores de escala, que para el sistema de coordenadas cilíndrico circular tenemos[4].

$$\begin{aligned} h_\rho &= 1 \\ h_\varphi &= \rho \\ h_z &= 1 \end{aligned} \quad 2)$$

Para obtener las superficies asociadas al sistema de coordenadas ortogonales tridimensionales cilíndricos circulares, se toman como base las ecuaciones de conversión del sistema coordenado cilíndrico (ρ, φ, z) con respecto al sistema coordenado rectangular (x, y, z) , que es el de referencia. Se tienen las siguientes ecuaciones paramétricas [2,4,5]:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \operatorname{sen} \varphi \\ z &= z \end{aligned} \quad 3)$$

Donde $\rho \in [0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ y $z \in [0, \infty)$. Las magnitudes de las variables ρ y z están dadas en unidades de longitud y φ en valores angulares. Las superficies asociadas a este sistema de coordenadas y su intersección unívoca se presenta en la Figura 1, en a) se tiene la superficie para la coordenada radial $\rho = \text{cte}$, es un cilindro circular cuyo radio depende del valor de ρ centrado en el eje vertical; en b) para $\varphi = \text{cte}$ tenemos medio plano que gira alrededor del eje vertical y su posición depende del ángulo φ ; en c) para $z = \text{cte}$, un plano perpendicular al eje vertical con un contorno circular, su posición sobre el eje vertical depende del valor de z y en d) presentamos la intersección de las tres superficies, donde resaltamos el único punto de intersección que se mantiene para todos los valores de las variables coordenadas[6].

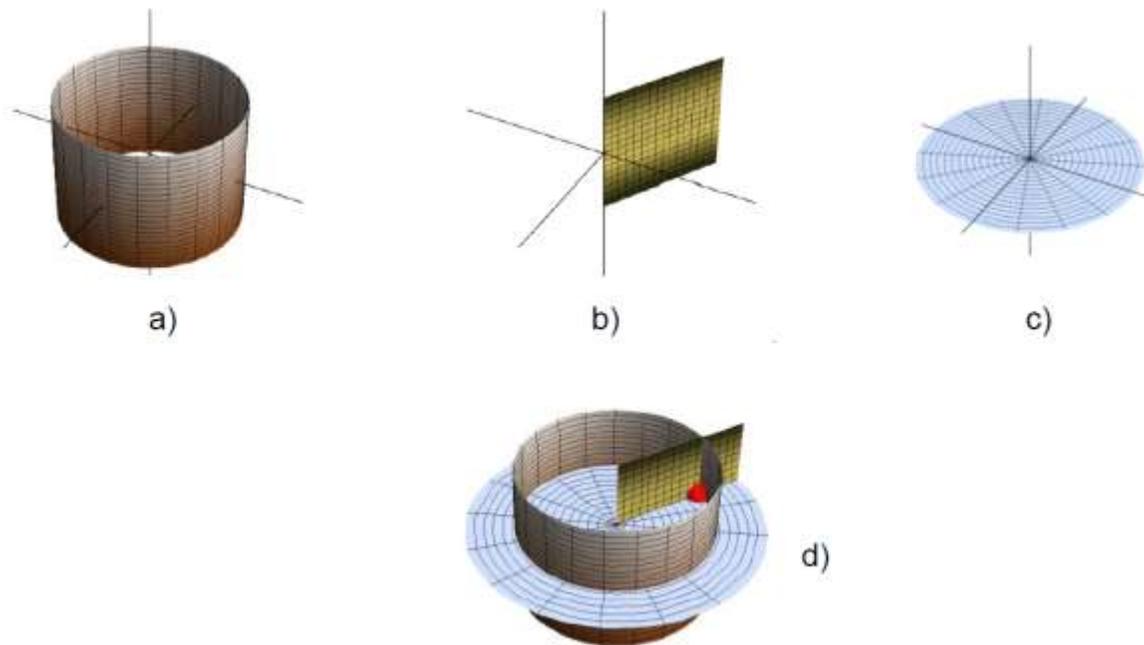


Fig. 1. Sistema de coordenadas cilíndricas a) Superficie para ρ constante, b) Superficie para φ constante, c) Superficies para z constante y d) Intersección de las superficies coordenadas[5,6].

3. Solución fundamental

Ahora una vez que tenemos graficadas de forma correcta las superficies coordenadas, resulta más claro visualizar las soluciones para este sistema coordenado. La ecuación de Helmholtz para este sistema coordenado es:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial E}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \kappa^2 E = 0 \quad 4)$$

Al aplicar separación de variables a esta ecuación obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales[7]:

$$\begin{aligned} \rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} + (\kappa_t^2 \rho^2 + n^2) R &= 0 \\ \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + n^2 \Phi &= 0 \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} + \kappa_z^2 Z &= 0 \end{aligned} \quad 5)$$

Donde R , Φ y Z son las soluciones a sus respectivas ecuaciones diferenciales ordinarias, $\kappa_t^2 = \kappa^2 - \kappa_z^2$ y n es un número entero. La ecuación con la variable φ tiene solución $e^{\pm in\varphi}$, la ecuación con la variable z tiene solución $e^{\pm i\kappa_z z}$. La primera es la ecuación de Bessel y por lo tanto R tiene como soluciones las funciones Bessel de primer tipo J_n , las funciones de Bessel de primer tipo, no es la única solución física [8]. La ecuación de Bessel es una ecuación diferencial de segundo orden y por lo tanto también tiene otra solución, esta es la función Bessel de



segundo tipo, también llamadas funciones Neumann, N_n que en ocasiones no es considerada por las singularidades que presenta. Por lo tanto la solución completa es

$$C_1 J_n(\rho) + C_2 N_n(\rho) \quad (6)$$

Donde C_1 y C_2 son dos constantes arbitrarias, cada una puede ser una solución, o una combinación lineal de ambas también lo es. Con la suma de estas soluciones se obtienen funciones Hankel de orden, H_n , las cuales son las soluciones fundamentales de la ecuación de Bessel que representan ondas viajeras [8],

$$\begin{aligned} H_n^1(\rho) &= J_n(\rho) + iN_n(\rho) \\ H_n^2(\rho) &= J_n(\rho) - iN_n(\rho) \end{aligned} \quad (7)$$

Para comprobar la condición física de la solución, es necesario conocer el desarrollo asintótico de la solución, para la función Bessel tenemos [8]

$$\begin{aligned} J_n(\rho) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \cos\left(\rho - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ N(\rho) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \operatorname{sen}\left(\rho - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ H_n^1(\rho) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{i\left(\rho - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \\ H_n^2(\rho) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{-i\left(\rho - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \end{aligned} \quad (8)$$

Podemos ver que las soluciones de tipo J_n y N_n por sí solas representan ondas estacionarias, similares al coseno y seno respectivamente en las coordenadas rectangulares, esto se comprueba al colocar la solución completa que incluirá la componente armónica temporal.

H_n^1 representa ondas viajeras entrantes, y H_n^2 representa ondas viajeras salientes. Es importante notar que H_n^1 y H_n^2 asintóticamente satisfacen la condición de radiación de Sommerfeld. La variable radial del sistema de coordenadas circulares, corresponde a la superficie mostrada en la Figura 1, descrita por un cilindro circular derecha.

La coordenada radial es ρ y la función que permite representar las ondas propagantes en la función Hankel, que en resulta de la suma de la función Bessel con la Neuman imaginaria, y esta función satisface la condición de radiación de Sommerfeld, su magnitud cuando tiende a infinito es cero[6].

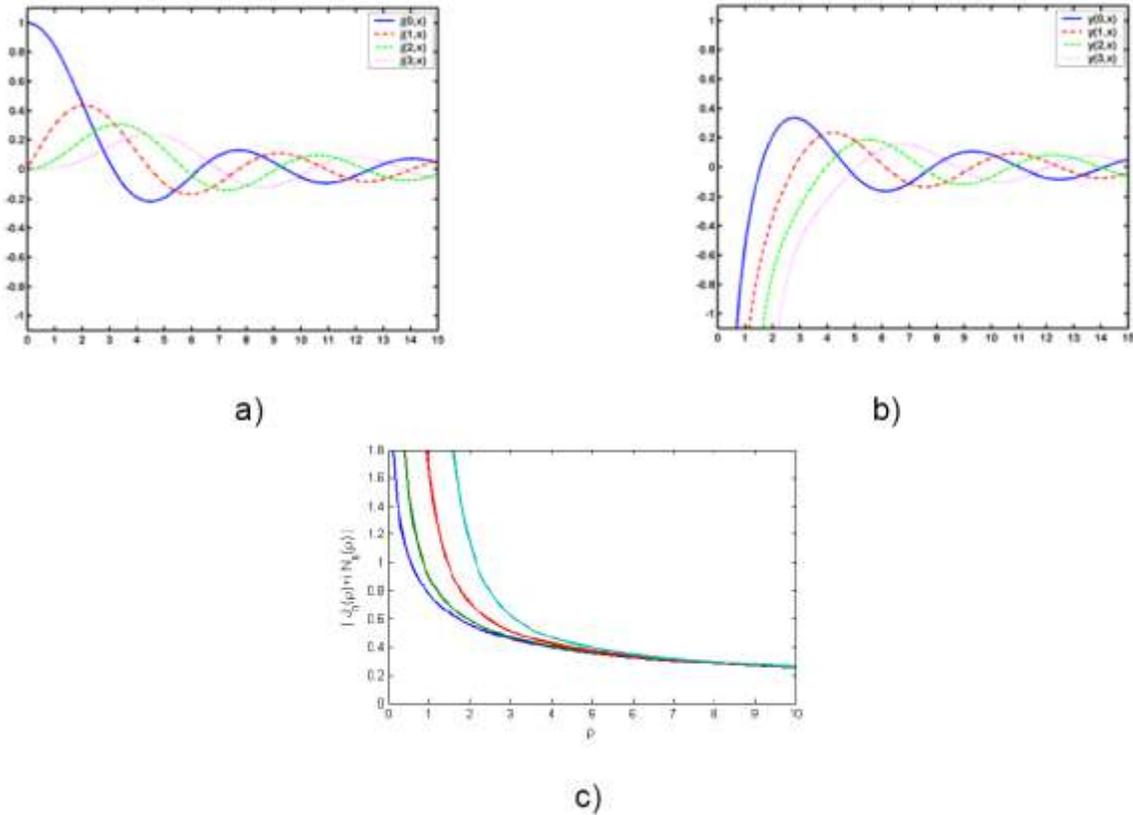


Fig. 2. Soluciones fundamentales de la ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas, a) función Bessel de primer tipo J_n , b) función Bessel de segundo tipo N_n y c) Valor absoluto de la solución fundamental[6].

Las funciones Hankel disminuye su amplitud a razón $1/\sqrt{\rho}$ lo que asegura que la función será cero en el infinito, esto es lo que les sucede en la naturaleza a las ondas electromagnéticas, entre mayor distancia viajen más es la atenuación. Las soluciones de las otras dos coordenadas se les pueden atribuir otras propiedades físicas como la cantidad de momento angular a la coordenada φ o la cantidad de momento lineal a la coordenada z . A pesar de ser independientes matemáticamente las tres variables, físicamente las relaciona la constante κ que es la magnitud el vector de propagación [6]. Estas soluciones tienen muchas aplicaciones, resaltan en el estudio de la propagación de haces ópticos en fibras ópticas, y los novedosos haces sin difracción, que son una buena alternativa en las comunicaciones ópticas inalámbricas.

3. Haces Bessel adifraccionales

Durnin et al demostró las características adifraccionales de los haces Bessel, es decir, que en condiciones ideales la propagación de estos haces se lleva a cabo sin cambios en la distribución de intensidad [9]. las aplicaciones de estos haces pueden ser en comunicaciones inalámbricas, conexiones ópticas, maquinado laser, entre otros.

La solución fundamental completa, incluyendo la parte temporal queda de la siguiente manera [10]

$$\begin{aligned}
 E(\rho, z, t) &= [J_0(\kappa\rho) + iN_0(\kappa\rho)]e^{i(k_z z - \omega t)} \\
 E(\rho, z, t) &= [J_0(\kappa\rho) - iN_0(\kappa\rho)]e^{i(k_z z - \omega t)}
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

En la Figura 3 presentamos un haz de óptico con una longitud de onda de 632 Nm que corresponde a un laser de He-Ne con un perfil Bessel de orden 0, con magnitud unitaria que se utiliza como función inicial, para la simulación de propagación de onda. Empleando el método numérico de diferencia finitas para la discretización de la aproximación paraxial de onda, se presentan en la Figura 4 los perfiles transversales de la amplitud del haz Bessel durante la propagación, el cual aprecia la característica adifraccional de estos haces[10].

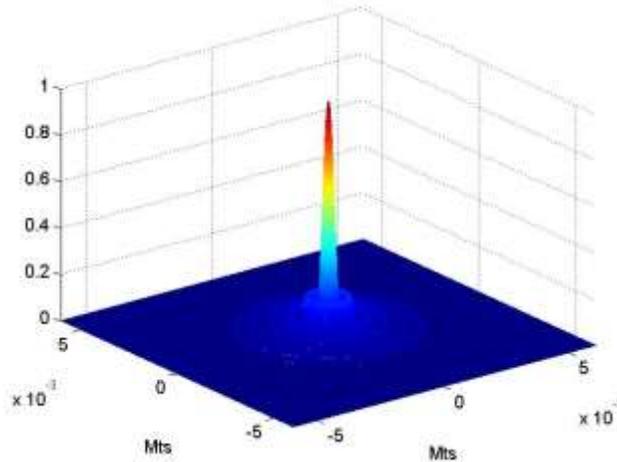


Fig. 3. Haz Bessel J_0 óptico para una longitud de onda 632 Nm y una apertura circular de 5×10^{-3} mts de diametro.

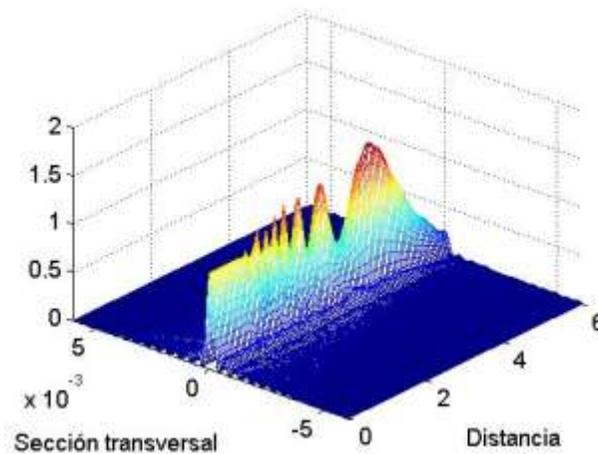


Figura 4: Sección transversal durante la propagación del Haz Bessel de longitud de onda 632 nm

X. Conclusiones



La representación apropiada de los sistemas de coordenadas y en el caso particular del sistema de coordenadas cilíndricos circulares, permiten comprender de forma clara la forma en que las soluciones fundamentales se relacionan con los frentes de onda, además los haces Bessel de primer y segundo tipo por si solos representan ondas estacionarias, la suma de ambos con imaginario el de segundo tipo, son los que representan ondas propagantes. Los haces Bessel además con las condiciones apropiadas de frontera tienen características adifraccionales

Z. Referencias

[1] Apellido, Iniciales, "Título", revista, Vol., No., fecha, páginas. (Este es el formato para referencias a revistas).

[2] Apellido, Iniciales, "Título", Editorial, lugar, fecha. (Este es el formato para referencias a libros).

[1] Jackson, D. "Classical Electrodynamics", 3rd ed., Wiley and Sons, 1999.

[2] Morse P. M. and Feshback H., "Methods of Theoretical Physics", McGraw-Hill, New York, Vols. 1 y 2, 1953.

[3] Eisenhart L. P., "Separable Systems in Euclidean 3-Space", Physical Review 45, 1934, 427-428.

[4] Moon, P. and Spencer, D. E. , Field Theory Handbook, Including Coordinate Systems, Differential Equations, and Their Solutions, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1971.

[5] Hernández J.A. and S. Chavez Cerda, Whole Families of Escalar Wavefields of Helmholtz Equation, Canada, America, México Graduate Students Physics Conference 2009.

[6] Hernandez J.A., "Familias de Campos Ondulatorios Fundamentales de la Ecuación de Helmholtz en Sistemas de Coordenadas Curvilíneas", Tesis Doctoral, Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica, 2012.

[7] Chavez-Cerda S., McDonald G.S., G.H.C. New, Nondirecting beams: travelling, standing, rotating and spiral waves," Optics Communication, Vol. 123, 225-233, 1996. Ortogonales.

[8] Abramowitz M. and Stegun I, "Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Table", Dover Books on Mathematics, 2012.

[9] Gutierrez-Vega J.C., Iturbe Castillo M.D. and Chavez-Cerda S., "Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams", Optics Letters, Vol. 25, No 20, 2000, 1493-1495.

[10] Chavez S., "A new approach to bessel beams", Journal of Modern Optics, Vol. 46, No 6, 1923-1930.