



## Método de Newton para Problemas de Búsqueda en Línea en $L^2$

Jorge López López<sup>1,\*</sup>, L. Héctor Juárez Valencia<sup>2</sup>

<sup>1</sup>División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco,  
Cunduacán, Tabasco, C.P. 86690, México

<sup>2</sup>Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana,  
Av. San Rafael Atlixco 186, Col. Vicentina, C.P. 09340, Iztapalapa, Estado de México, México  
[\\*jorge.lopez@ujat.mx](mailto:jorge.lopez@ujat.mx)

Recibido: 15 de julio de 2018. Aceptado: 12 de diciembre 2018. Publicado: 1 de diciembre de 2019.

---

### Resumen

Este trabajo trata sobre la aplicación del método de Newton para resolver un problema de búsqueda en línea asociado con la minimización de un funcional definido en el espacio de Hilbert  $L^2(0; T)$ , con  $T$  un tiempo final dado. El funcional está asociado con un problema de control de un circuito de 3 juntas de Josephson modelado por un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales dependientes del tiempo. El problema de control se puede resolver con el método de gradiente conjugado, dentro del cual se deben resolver problemas de búsqueda en línea como el descrito en este trabajo y para el cual se describe tanto el caso continuo como su versión discreta. Para discretizar el problema, las funciones en  $L^2(0; T)$  se aproximan por funciones lineales por pedazos y los sistemas diferenciales ordinarios se resuelven con un método de Euler semi-implícito.

**Palabras clave:** Optimización, Control, Hilbert, Euler, semi-implícito.

### Abstract

This work is about the application of Newton method to the solution of line search problems associated with the minimization of a functional defined in the Hilbert space  $L^2(0; T)$ . This functional is associated with the control of a circuit of three Josephson junctions modelled by a system of three nonlinear ordinary differential equation depending on time. The control problem is intended to be solved by a conjugate gradient algorithm which involve line search problems similar to the problems described in this work and for which the continuous version as well as the discrete version is included. In order to discretize the line search problem, the functions in  $L^2(0; T)$  are approximated by piece-wise continuous functions and the ordinary differential equations are solved by a semi-implicit Euler method.

**Keywords:** Optimization, Control, Hilbert, Euler, Semi-implicit.

---

### 1. Introducción

En optimización, la estrategia de búsqueda en línea es uno de los enfoques iterativos básicos para encontrar un mínimo local  $\mathbf{v}^*$  de una función objetivo  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . El enfoque de búsqueda en línea primero encuentra una dirección de descenso a lo largo de la cual la función objetivo  $f$  será restringida y entonces se calcula el tamaño de paso que determinará qué tan lejos  $\mathbf{v}$  debe moverse a lo largo de esa dirección. Este tamaño de paso está asociado con un mínimo local de la restricción de  $f$  a la recta

de búsqueda. Al problema de encontrar este tamaño de paso se le llama un problema de búsqueda en línea, es decir, es un problema de minimización con restricciones de la forma

$$\begin{cases} \text{Min } f(v) \\ \text{sujeto a } v = u - \rho w, \forall \rho \in \mathbb{R}; u, w \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1)$$

que también se puede escribir como

$$\text{Min}_{\rho \in \mathbb{R}} f(u - \rho w). \quad (2)$$

Aquí la recta de búsqueda es la recta que pasa por  $u$  y tiene (por conveniencia, para nuestras posteriores aplicaciones) la dirección  $-w$ . Como ya se dijo, una de las áreas donde surgen problemas de búsqueda en línea son los métodos iterativos para minimizar localmente una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sin restricciones. En cada iteración  $i$  debe resolverse un problema de búsqueda en línea de la forma (2), para  $u$  y  $w$  conocidos. Si denotamos con  $\rho_i$  a la solución del problema de búsqueda en línea de la iteración  $i$ , se toma a  $v_i = u - \rho_i w$  como la nueva aproximación para el mínimo de  $f$ . La solución de los problemas de búsqueda en línea se puede aproximar por una variedad de métodos numéricos [2], entre ellos el método de Newton. Si definimos  $g(\rho) = f(u - \rho w)$  entonces la solución del problema (2) es equivalente a la solución del problema en  $\mathbb{R}$

$$\text{Min}_{\rho \in \mathbb{R}} g(\rho). \quad (3)$$

Para resolver este problema buscamos los valores donde la derivada de  $g$  se hace cero, es decir, resolvemos (por Newton) la ecuación

$$g'(\rho^*) = 0. \quad (4)$$

Tenemos que

$$g'(\rho) = -Df(u - \rho w; w) = -\nabla f(u - \rho w) \cdot w \quad (5)$$

así que por comodidad definimos

$$H(\rho) = -g'(\rho) = Df(u - \rho w; w) = \nabla f(u - \rho w) \cdot w \quad (6)$$

y resolvemos la ecuación

$$H(\rho^*) = 0, \quad (7)$$

para lo cual, dada una aproximación inicial  $\rho_0$ , se construyen sucesivas aproximaciones de acuerdo a

$$\rho_{i+1} = \rho_i - \frac{H(\rho_i)}{H'(\rho_i)}, i = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

En este trabajo aplicaremos el método de Newton a un problema de búsqueda en línea donde los elementos  $u$  y  $w$  son conocidos pero pertenecen al espacio de Hilbert  $L^2$ .

Los problemas de búsqueda en línea en que estamos interesados aquí son del tipo

$$\begin{cases} \rho_* \in \mathbb{R}, \\ J(u - \rho_* w) \leq J(u - \rho w), \forall \rho \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (9)$$

con  $u$  y  $w$  fijos en  $L^2(0, T)$ , y donde (con  $k > 0$  y  $\|\cdot\|$  la norma euclídeana canónica)

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^T v^2 dt + \frac{k}{2} \|\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_T\|^2, \quad (10)$$

y la función vectorial  $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, y_3\}$  es la solución del siguiente problema de valor inicial que modela la dinámica de un circuito de tres juntas de Josephson acopladas inductivamente, [1]:

$$\begin{cases} \gamma_1 \frac{dy_1}{dt} + \kappa_1(y_1 - y_2) + \sin y_1 = i_1 + v, & \text{en } (0, T), \\ \gamma_2 \frac{dy_2}{dt} + \kappa_1(y_2 - y_1) + \kappa_2(y_2 - y_3) + \sin y_2 = i_2, & \text{en } (0, T), \\ \gamma_3 \frac{dy_3}{dt} + \kappa_2(y_3 - y_2) + \sin y_3 = i_3, & \text{en } (0, T), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0. \end{cases} \quad (11)$$

En [1] y en [5] se dan los siguientes valores factibles para los parámetros involucrados en este sistema:

$$\gamma_1 = 0.7, \quad \gamma_2 = 1.1, \quad \gamma_3 = 0.7, \quad i_1 = 1, \quad i_2 = 0.8, \quad i_3 = -1, \quad (12)$$

$$\kappa_1 = \kappa_2 = 0.1. \quad (13)$$

. En (10)-(11),  $\mathbf{y}_0$  y  $\mathbf{y}_T$  son estados inicial y final conocidos, respectivamente.

### 1.1 El problema de minimización global y el diferencial de $J$

El problema de minimización global o sin restricciones asociado con los problemas de búsqueda en línea es

$$\begin{cases} v^* \in L^2(0, T), \\ J(v^*) \leq J(v), \forall v \in L^2(0, T), \end{cases} \quad (14)$$

El problema (10)-(11)-(14) corresponde a un problema de control cuyo objetivo es llevar la dinámica del sistema del estado  $\mathbf{y}_0$  al estado  $\mathbf{y}_T$ . Este tipo de problemas de control pueden resolverse usando un algoritmo de gradiente conjugado como los discutidos en el Capítulo 2 de [3] y el Capítulo 3 de [4], donde también se menciona el concepto de Frechet-diferenciabilidad adecuado para minimizar funcionales en espacios de Hilbert y la prueba del teorema mencionado a continuación.

Definición. Sea  $V$  un espacio de Hilbert. Un funcional  $J$  sobre  $V$  es Frechet-diferenciable si, para todo  $v, w \in V$ , existe  $DJ(v) \in V'$ , la derivada o el diferencial de  $J$  en  $v$ , tal que

$$J(v + w) - J(v) = \langle DJ(v), w \rangle + \|w\| \epsilon(v, w), \quad (15)$$

con  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denotando par de dualidad, y  $\epsilon(v, w)$  tendiendo a cero cuando  $\|w\|$  tiende a cero. Similarmente,  $J$  es Gateaux-diferenciable sobre  $V$  si  $\forall v, w \in V$  existe  $DJ(v) \in V'$  tal que

$$J(v + tw) - J(v) = t \langle DJ(v), w \rangle + t \epsilon(t, v, w), \quad (16)$$

y  $\epsilon(t, v, w)$  tendiendo a cero cuando  $t$  tiende a cero.

Teorema. Si  $J$  es Frechet-diferenciable en  $V$ , entonces

- $J$  es continuo.

- $J$  es Gateaux-diferenciable.
- Si  $J$  tiene un mínimo en  $v^*$ , entonces  $DJ(v^*) = 0$ .

Si  $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, p_3\}$  se define como la solución del siguiente problema (**sistema adjunto**):

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Gamma \frac{d\mathbf{p}}{dt} + K\mathbf{p} + \begin{pmatrix} \cos y_1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos y_2 & 0 \\ 0 & 0 & \cos y_3 \end{pmatrix} \mathbf{p} = \mathbf{0}, \text{ en } (0, T), \\ \Gamma \mathbf{p}(T) = k(\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}_T). \end{array} \right. \quad (17)$$

entonces el diferencial del funcional  $J$  considerado en este trabajo está dado por

$$DJ(v) = v + p_1, \quad (18)$$

ya que podemos identificar a  $L^2$  con su dual.

## 2. Metodología

### 2.1 Resolviendo (9) con el método de Newton

Definiendo

$$g(\rho) = J(u - \rho w), \quad (19)$$

tomando en cuenta la definición de  $J$  y por (15) (regla de la cadena) tenemos que

$$g'(\rho) = \frac{d}{d\rho} J(u - \rho w) = -\langle DJ(u - \rho w), w \rangle. \quad (20)$$

Definimos  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $H(\rho) = -g'(\rho)$ , o sea

$$H(\rho) = \langle DJ(u - \rho w), w \rangle. \quad (21)$$

Supongamos que  $\rho_*$  es solución de (9). Se sigue entonces que

$$H(\rho_*) = 0, \quad (22)$$

y escribimos por el momento

$$\dot{H}(\rho) = -\langle D^2 J(u - \rho w)w, w \rangle. \quad (23)$$

Dado  $\rho^0$  ( $\rho^0 = 0$  parece ser una buena opción en este contexto), para  $m \geq 0$  la solución por el método de Newton para (22) queda

$$\rho^{m+1} = \rho^m - \frac{H(\rho^m)}{\dot{H}(\rho^m)}, \quad (24)$$

o más explícitamente

$$\rho^{m+1} = \rho^m + \frac{\langle DJ(u - \rho w), w \rangle}{\langle D^2 J(u - \rho w)w, w \rangle}. \quad (25)$$

Como estamos trabajando en  $L^2(0, T)$ , donde los pares de dualidad coinciden con los productos interiores, podemos escribir

$$H(\rho) = \int_0^T DJ(u - \rho w)w \, dt; \quad (26)$$

con

$$DJ(u - \rho w) = u - \rho w + p_{1\rho}. \quad (27)$$

donde  $p_{1\rho}$  se obtiene resolviendo el problema

$$\begin{cases} \gamma_1 \frac{dy_{1\rho}}{dt} + \kappa_1(y_{1\rho} - y_{2\rho}) + \sin y_{1\rho} = i_1 + u - \rho w, & \text{en } (0, T), \\ \gamma_2 \frac{dy_{2\rho}}{dt} + \kappa_1(y_{2\rho} - y_{1\rho}) + \kappa_2(y_{2\rho} - y_{3\rho}) + \sin y_{2\rho} = i_2, & \text{en } (0, T), \\ \gamma_3 \frac{dy_{3\rho}}{dt} + \kappa_2(y_{3\rho} - y_{2\rho}) + \sin y_{3\rho} = i_3, & \text{en } (0, T). \\ \mathbf{y}_\rho(0) = \mathbf{y}_0. \end{cases} \quad (28)$$

y luego el problema

$$\begin{cases} -\Gamma \frac{d\mathbf{p}_\rho}{dt} + K\mathbf{p}_\rho + \begin{pmatrix} \cos y_{1\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \cos y_{2\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \cos y_{3\rho} \end{pmatrix} \mathbf{p}_\rho = \mathbf{0}, & \text{en } (0, T), \\ \Gamma \mathbf{p}_\rho(T) = k(\mathbf{y}_\rho(T) - \mathbf{y}_T). \end{cases} \quad (29)$$

Solo falta calcular  $\dot{H}(\rho) = \frac{dH}{d\rho}$ . Esto es casi directo, ya que por la definición de  $H$  (y por la regla de Leibnitz para derivar integrales que dependen de un parámetro) tenemos

$$\dot{H}(\rho) = \int_0^T [-w + \dot{p}_{1\rho}]w \, dt,$$

donde  $\dot{p}_{1\rho}$  se obtiene resolviendo el problema

$$\begin{cases} -\Gamma \frac{d\dot{\mathbf{y}}_\rho}{dt} + K\dot{\mathbf{y}}_\rho + \begin{pmatrix} \cos y_{1\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \cos y_{2\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \cos y_{3\rho} \end{pmatrix} \dot{\mathbf{y}}_\rho = \begin{pmatrix} -w \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{en } (0, T), \\ \mathbf{y}_\rho(0) = \mathbf{y}_0. \end{cases} \quad (30)$$

y luego el problema

$$\begin{cases} -\Gamma \frac{d\dot{\mathbf{p}}_\rho}{dt} + K\dot{\mathbf{p}}_\rho + \begin{pmatrix} \cos y_{1\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \cos y_{2\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \cos y_{3\rho} \end{pmatrix} \dot{\mathbf{p}}_\rho = \\ \begin{pmatrix} \dot{y}_{1\rho} \sin y_{1\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{y}_{2\rho} \sin y_{2\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{y}_{3\rho} \sin y_{3\rho} \end{pmatrix} \mathbf{p}_\rho, & \text{en } (0, T), \\ \Gamma \dot{\mathbf{p}}_\rho(T) = k\dot{\mathbf{y}}_\rho(T). \end{cases} \quad (31)$$

## 2.2 Discretización del problema (14)

Usaremos la notación  $\mathbf{y}^n = \{\mathbf{y}_i^n\}_{i=1}^3$  para especificar el valor discreto de la función vectorial  $\mathbf{y}$  al tiempo  $n\Delta t$ ; similarmente,  $u^n$  denota el valor discreto de la función  $u$  al tiempo  $n\Delta t$ . Aproximamos (14) por

$$\begin{cases} \mathbf{v}^* \in \mathbb{R}^N, \\ J^{\Delta t}(\mathbf{v}^*) \leq J^{\Delta t}(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (32)$$

donde  $\Delta t = T/N$  con  $N$  un entero positivo "grande" y el funcional de costo  $J^{\Delta t}$  es definido por

$$J^{\Delta t}(\mathbf{v}) = \frac{\Delta t}{2} \sum_{n=1}^N |v^n|^2 + \frac{k}{2} \|\mathbf{y}^N - \mathbf{y}_T\|^2,$$

con  $\mathbf{v} = \{v^n\}_{n=1}^N$  y  $\{\mathbf{y}^n\}_{n=1}^N$  obtenido de  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{y}_0$  a través de la siguiente variante discreta de (11):

$$\mathbf{y}^0 = \mathbf{y}_0, \quad (33)$$

y para  $n = 1, \dots, N$

$$\left\{ \Gamma \frac{\mathbf{y}^n - \mathbf{y}^{n-1}}{\Delta t} + K\mathbf{y}^n + \begin{pmatrix} \sin y_1^{n-1} \\ \sin y_2^{n-1} \\ \sin y_3^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 + v^n \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} \right\} \text{ en } (0, T).$$

Si en  $\mathbb{R}^N$  consideramos el producto interior

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w})_{\Delta t} = \Delta t \sum_{n=1}^N v^n w^n, \quad \forall \mathbf{v} = \{v^n\}_{n=1}^N, \mathbf{w} = \{w^n\}_{n=1}^N \in \mathbb{R}^N,$$

y definimos  $\{\mathbf{p}^n\}_{n=1}^{N+1}$  como la solución del siguiente problema adjunto:

$$\Gamma \mathbf{p}^{N+1} = k(\mathbf{y}^N - \mathbf{y}_T), \quad (34)$$

$$\Gamma \frac{\mathbf{p}^N - \mathbf{p}^{N+1}}{\Delta t} + K\mathbf{p}^N = \mathbf{0}, \quad (35)$$

y para  $n = N - 1, \dots, 1$  :

$$\Gamma \frac{\mathbf{p}^n - \mathbf{p}^{n+1}}{\Delta t} + K\mathbf{p}^n + \begin{pmatrix} \cos y_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \cos y_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \cos y_3^n \end{pmatrix} \mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{0}, \quad (36)$$

entonces

$$DJ^{\Delta t}(\mathbf{v}) = \{v^n + p_1^n\}_{n=1}^N. \quad (37)$$

Los problemas de búsqueda en línea asociados con el problema finito-dimensional (32) son del tipo

$$\begin{cases} \rho_* \in \mathbb{R}, \\ J^{\Delta t}(\mathbf{u} - \rho_* \mathbf{w}) \leq J^{\Delta t}(\mathbf{u} - \rho \mathbf{w}), \forall \rho \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (38)$$

con  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{w}$  fijos en  $\mathbb{R}^N$ .

### 3. Resolviendo (38) con el método de Newton

Si  $\rho_* \in \mathbb{R}$  es solución de (38), entonces  $\rho_*$  es un cero de la función

$$H(\rho) = \Delta t \sum_{n=1}^N [(u^n - \rho w^n) + p_{1\rho}^n] w^n, \quad (39)$$

donde  $\{p_{1\rho}^n\}_{n=1}^{N+1}$  se define calculando la solución  $\{\mathbf{y}_\rho^n\}_{n=1}^N = \{(y_{1\rho}^n, y_{2\rho}^n, y_{3\rho}^n)\}_{n=1}^N$  de

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}_\rho^0 = \mathbf{y}_0, \\ \text{para } n = 1, \dots, N \text{ resolver} \\ \Gamma \frac{\mathbf{y}_\rho^n - \mathbf{y}_\rho^{n-1}}{\Delta t} + K \mathbf{y}_\rho^n + \begin{pmatrix} \sin y_{1\rho}^{n-1} \\ \sin y_{2\rho}^{n-1} \\ \sin y_{3\rho}^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 + u^n - \rho w^n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{array} \right. \quad (40)$$

y entonces resolver para  $\{\mathbf{p}_\rho^n\}_{n=1}^{N+1} = \{(p_{1\rho}^n, p_{2\rho}^n, p_{3\rho}^n)\}_{n=1}^{N+1}$  el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma \mathbf{p}_\rho^{N+1} = k(\mathbf{y}_\rho^N - \mathbf{y}_T), \\ \Gamma \frac{\mathbf{p}_\rho^N - \mathbf{p}_\rho^{N+1}}{\Delta t} + K \mathbf{p}_\rho^N = \mathbf{0}, \\ \text{para } n = N - 1, \dots, 1 \text{ resolver} \\ \Gamma \frac{\mathbf{p}_\rho^n - \mathbf{p}_\rho^{n+1}}{\Delta t} + K \mathbf{p}_\rho^n \\ + \begin{pmatrix} \cos y_{1\rho}^n & 0 & 0 \\ 0 & \cos y_{2\rho}^n & 0 \\ 0 & 0 & \cos y_{3\rho}^n \end{pmatrix} \mathbf{p}_\rho^{n+1} = \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad (41)$$

Para resolver la ecuación  $H(\rho_*) = 0$  con Newton se requiere el conocimiento de  $\dot{H}(\rho)$ : observando (39) concluimos que

$$\dot{H}(\rho) = \Delta t \sum_{n=1}^N [-w^n + \dot{p}_{1\rho}^n] w^n, \quad (42)$$

con  $\dot{p}_{1\rho}^n$  obtenido al diferenciar (40) y (41) con respecto a  $\rho$ , esto es, al resolver para  $\dot{\mathbf{y}}_\rho^n$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{y}}_\rho^0 = \mathbf{0}, \\ \text{para } n = 1, \dots, N \text{ resolver} \\ \Gamma \frac{\dot{\mathbf{y}}_\rho^n - \dot{\mathbf{y}}_\rho^{n-1}}{\Delta t} + K \dot{\mathbf{y}}_\rho^n + \begin{pmatrix} \cos y_{1\rho}^{n-1} \\ \cos y_{2\rho}^{n-1} \\ \cos y_{3\rho}^{n-1} \end{pmatrix} \dot{\mathbf{y}}_\rho^{n-1} = \begin{pmatrix} -w^n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{array} \right. \quad (43)$$

y luego resolver para  $\dot{\mathbf{p}}_\rho^n$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma \dot{\mathbf{p}}_\rho^{N+1} = k \dot{\mathbf{y}}_\rho^N, \\ \Gamma \frac{\dot{\mathbf{p}}_\rho^N - \dot{\mathbf{p}}_\rho^{N+1}}{\Delta t} + K \dot{\mathbf{p}}_\rho^N = \mathbf{0}, \\ \text{para } n = N - 1, \dots, 1 \text{ resolver} \\ \Gamma \frac{\dot{\mathbf{p}}_\rho^n - \dot{\mathbf{p}}_\rho^{n+1}}{\Delta t} + K \dot{\mathbf{p}}_\rho^n \\ + \begin{pmatrix} \cos y_{1\rho}^n & 0 & 0 \\ 0 & \cos y_{2\rho}^n & 0 \\ 0 & 0 & \cos y_{3\rho}^n \end{pmatrix} \dot{\mathbf{p}}_\rho^{n+1} = \\ \begin{pmatrix} \dot{y}_{1\rho}^n \sin y_{1\rho}^n & 0 & 0 \\ 0 & \dot{y}_{2\rho}^n \sin y_{2\rho}^n & 0 \\ 0 & 0 & \dot{y}_{3\rho}^n \sin y_{3\rho}^n \end{pmatrix} \dot{\mathbf{p}}_\rho^{n+1}. \end{array} \right. \quad (44)$$

Con esto podemos ya aplicar Newton para resolver (38): Dado  $\rho^0$  ( $\rho^0 = 0$  parece ser una buena opción en este contexto), iterar con

$$\rho^{m+1} = \rho^m - \frac{H(\rho^m)}{\dot{H}(\rho^m)}. \quad (45)$$

Usamos el criterio de paro  $abs(\rho^{m+1} - \rho^m)/abs(\rho^{m+1}) < \varepsilon$ , para  $\varepsilon$  mayor que cero dado.

#### 4. Resultados

##### 4.1 Ejemplo 1

En este ejemplo tomamos  $u(t) = \mathbf{0}$  y  $w(t) = DJ(\mathbf{0})$ . El diferencial de  $J$  en  $v = \mathbf{0}$  es dado analíticamente por  $DJ(v) = v + p_1$ , pero debe aproximarse numéricamente ya que no conocemos la solución exacta de  $p_1$ . Para esto debe resolverse numéricamente (11) y luego (17) ó (33)-(36). Las gráficas de  $u$  y  $w = DJ(\mathbf{0})$  se muestran en la Figura 1. Tanto para las aproximaciones de  $u$  y  $w$  como para las iteraciones de Newton (calculando  $H$  y su derivada con (39) y (42)) se tomaron los valores siguientes:

- $T = 11.0$ .
- $\rho^0 = 0.0$ .
- $k = 10000$ .
- $\Delta T = 1.0/500.0$ .
- $\varepsilon = 1.0e - 4$ .
- $\mathbf{y}_0 = [1.2514; 0.7456; -0.9753]$ .
- $\mathbf{y}_T = [7.4207; 6.4958; -0.3236]$ .

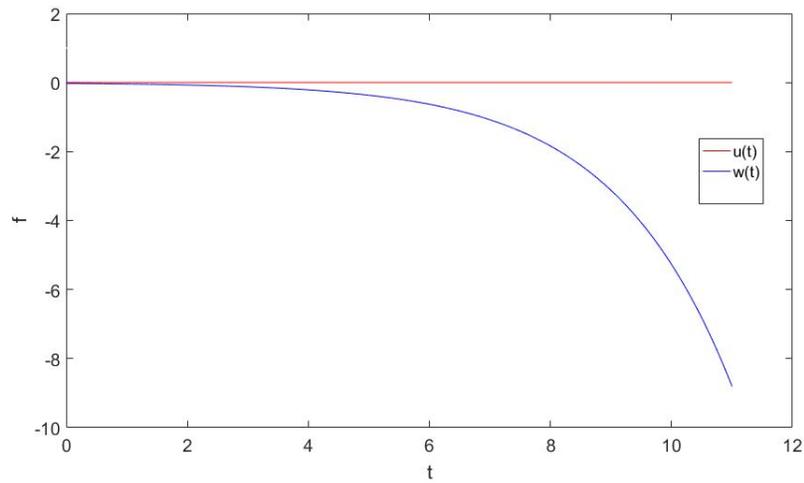
En 9 iteraciones se obtuvo el valor  $\rho_* = 0.25582903$ . La gráfica del funcional  $J$  restringido a la recta  $v = u - \rho w$  se muestra en la Figura 2.

La derivada con respecto a  $\rho$  de la restricción de  $J$  a la recta  $v = u - \rho w$  se muestra en la Figura 3.

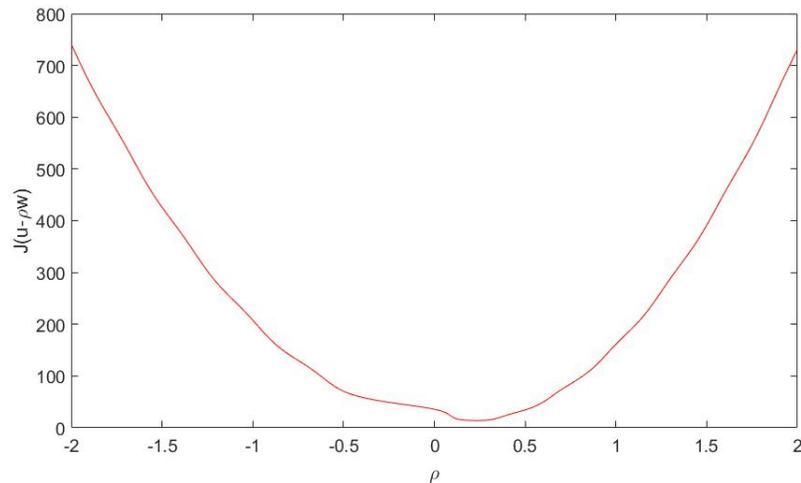
##### 4.2 Ejemplo 2

En este ejemplo tomamos  $u = \text{texp}(-t)$  y  $w = \text{exp}(-t)/10$ . Las gráficas de  $u$  y  $w$  se muestran en la Figura 4. Tanto para las aproximaciones de  $u$  y  $w$  como para las iteraciones de Newton se tomaron los valores siguientes:

- $T = 20.0$ .
- $\rho^0 = -10.0$ .
- $k = 1/10000 = 1e - 4$ .



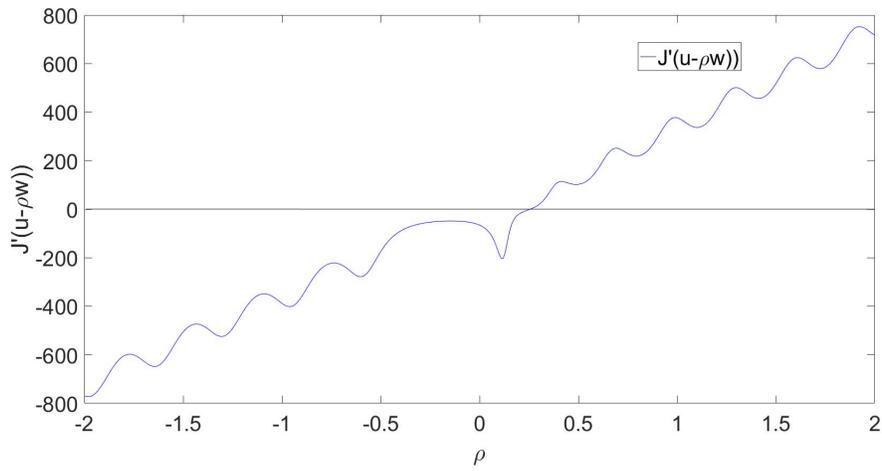
**Figura 1.** Funciones  $u(t)$  y  $w(t)$  para el ejemplo 1. Dadas estas funciones, se minimiza sobre  $\rho$  el funcional  $J(u(t) - \rho w(t))$ .



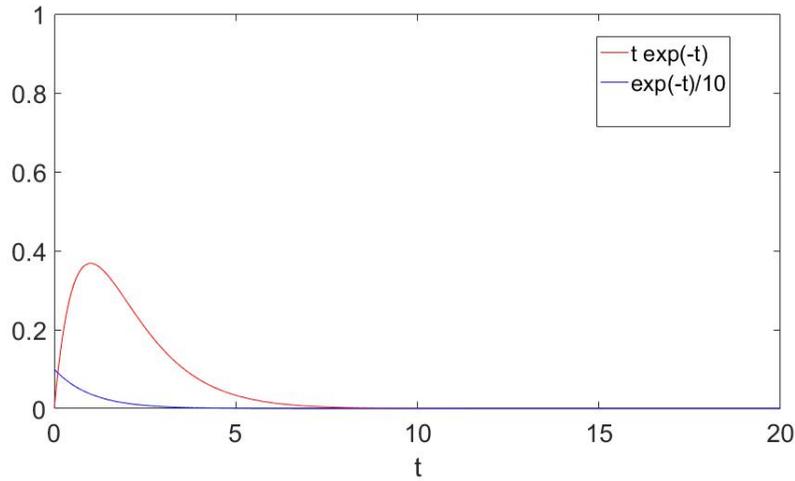
**Figura 2.** Funcional  $J(u(t) - \rho w(t))$  para las funciones  $u$  y  $w$  que se muestran en la Figura 1.

- $\Delta T = 1.0/500.0$ .
- $\varepsilon = 1.0e - 4$ .
- $\mathbf{y}_0 = [1.2514; 0.7456; -0.9753]$ .
- $\mathbf{y}_T = [7.4207; 6.4958; -0.3236]$ .

En 2 iteraciones se obtuvo el valor  $\rho_* = 5.01000653$ . La gráfica del funcional  $J$  restringido a la recta  $v = u - \rho w$  se muestra en la Figura 5.



**Figura 3.** Derivada con respecto a  $\rho$  de  $J(u(t) - \rho w(t))$  para las funciones  $u$  y  $w$  que se muestran en la Figura 1.



**Figura 4.** Funciones  $u(t) = t \exp(-t)$  y  $w(t) = \exp(-t)/10$  para el ejemplo 2. Dadas estas funciones, se minimiza sobre  $\rho$  el funcional  $J(u(t) - \rho w(t))$ .

La derivada con respecto a  $\rho$  de la restricción de  $J$  a la recta  $v = u - \rho w$  se muestra en la Figura 6.

### 5. Conclusiones

No contamos con un ejemplo para el cual se conozca la solución exacta, así que nuestra validación se basa en el desempeño del método en ejemplos como los dos mostrados, dado que es posible tener una visualización suficientemente detallada del funcional  $J$  restringido a la "recta" que pasa por  $u$  y tiene dirección  $w$ . De acuerdo

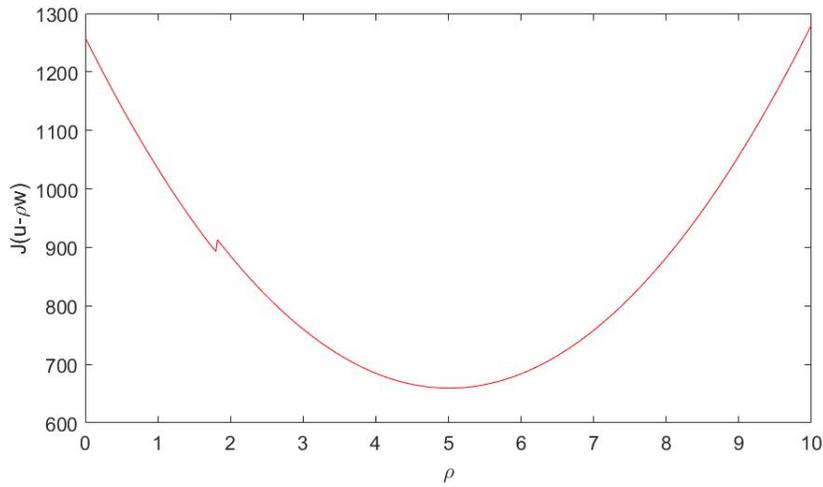


Figura 5. Funcional  $J(u(t) - \rho w(t))$  para las funciones  $u$  y  $w$  que se muestran en la Figura 4.

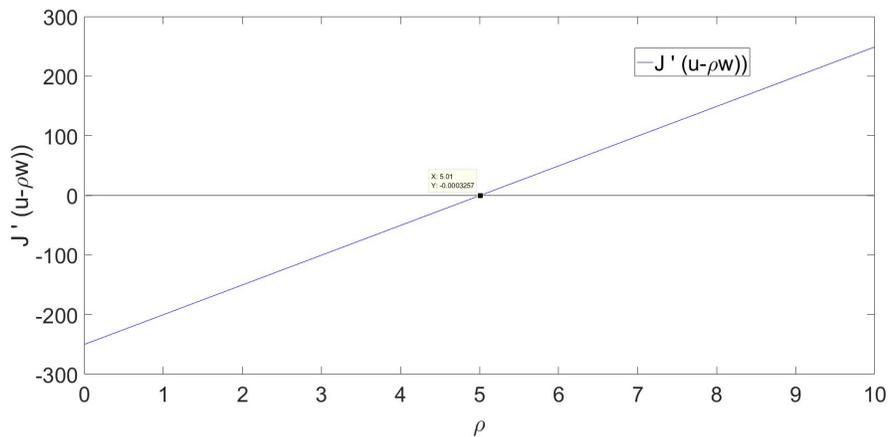


Figura 6. Derivada con respecto a  $\rho$  de  $J(u(t) - \rho w(t))$  para las funciones  $u$  y  $w$  que se muestran en la Figura 4.

a estos ejemplos se puede concluir que el método de Newton produce resultados excelentes. En este trabajo no era el objetivo comparar el método de Newton con otros métodos, sino verificar que este tipo de problemas se pueden resolver aceptablemente utilizando el método de Newton; sin embargo en trabajos futuros esperamos hacer tal comparación, por ejemplo, con los métodos que no utilizan derivadas.

### Agradecimientos

Agradezco al PRODEP por el apoyo financiero para la escritura de este artículo, en el marco del proyecto UJAT-EXB-230, dentro del programa de apoyo a exbecarios.

### Referencias

- [1] Y. Braiman, B. Neschke, N. Nair, N. Imam and R. Glowinski, (2016) *Memory States in Small Arrays of Josephson Junctions*, PHYSICAL REVIEW E 94, 052223.
- [2] R. P. Brent, (1973) *Algorithms for minimization without derivatives*. Courier Dover Publications.
- [3] R. Glowinski, (2015) *Variational Methods for the Numerical Solution of Nonlinear Elliptic Problems*, SIAM, Philadelphia, PA.
- [4] R. Glowinski, (2003) *Finite element methods for incompressible viscous flow*. In Handbook of Numerical Analysis, Vol. IX, P.G. Ciarlet & J.L. Lions, eds., North-Holland, Amsterdam, 3-1176.
- [5] J.D. Rezac, N. Imam, and Y. Braiman, (2017) *Parameter optimization for transitions between memory states in small arrays of Josephson junctions*, PHYSICA A 474, 267-281.