Journal of Basic Sciences, Vol. 4 (4), enero-abril 2016

Teorema de Karlin - Rubin y ejemplos no clásicos

E. Nájera Rangel[1,*], B. G. Peralta Reyes [1], A. Pérez Pérez[1.]

División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tabasco, México
edilberto.najera@ujat.mx

El teorema de Karlin - Rubin es una generalización del lema de Neyman - Pearson, de tal forma que bajo ciertas condiciones nos permite obtener los mejores procedimientos para probar hipótesis estadísticas compuestas unilaterales. El propósito de este trabajo es proporcionar una introducción básica de este teorema e ilustrar su aplicación a través de ejemplos no incluídos en los libros de texto más conocidos.

The Karlin - Rubin theorem is a generalization of the Neyman-Pearson lemma, so that under certain conditions allows us to obtain the best procedures to test statistical composite one-sided hypotheses. The purpose of this paper is to provide a basic introduction to this theorem and illustrate its application through examples not included in the most popular textbooks.

Palabras claves: Estadístico suficiente, prueba de hipótesis, teorema de Karlin-Rubin.
Keywords: Sufficient statistic, hypothesis testing, Karlin-Rubin theorem.

1. Introducción

Uno de los objetivos principales de la estadística es el de hacer inferencias respecto a parámetros poblacionales desconocidos a través de la información contenida en una muestra. Estas inferencias pueden interpretarse como estimaciones de los parámetros respectivos o como pruebas de hipótesis relacionadas con sus valores. Específicamente, en este trabajo suponemos un experimento aleatorio para el cual se conoce la forma de su función de densidad o de probabilidad (en el caso discreto) f en algún espacio Euclidiano $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$, pero que ésta depende de algún parámetro desconocido θ, de modo que $f(\cdot) \equiv f(\cdot;\theta)$, del cual sólo se sabe que pertenece a cierto conjunto $\Theta \subset \mathbb{R}^k$, $k \geq 1$, llamado el *espacio de parámetros.* Nuestro interés se centra en probar la hipótesis $H_0 : \theta \in \Theta_0$ versus $H_1 : \theta \in \Theta_0^c$, donde $\Theta_0 \subset \Theta$ y $\Theta_0^c = \Theta - \Theta_0$. A H_0 le llamaremos la *hipótesis nula* y a H_1 la *hipótesis alternativa.*

Supongamos dada una muestra aleatoria $X = (X_1, \ldots, X_n)$ de la función de densidad o de probabilidad $f(x;\theta)$.

Recibido: 4 julio 2015. Aceptado: 11 diciembre 2015. Publicado: 01 enero 2016.

Definición 1. Una *prueba de hipótesis* es una regla que especifica:

(a) Los valores de la muestra X para los que se acepta H_0 como cierta.

(b) Los valores de la muestra X para los que se rechaza H_0 y se acepta H_1 como cierta.

El subconjunto R del rango de X para el cual H_0 se rechaza es llamado la *región de rechazo* o *región crítica*.

Definición 2. Consideremos el problema de prueba de hipótesis $H_0 : \theta \in \Theta_0$ vs $H_1 : \theta \in \Theta_0^c$. Si $\theta \in \Theta_0$ pero la prueba de hipótesis decide incorrectamente rechazar H_0, se dice que se ha cometido un *error de tipo I*. Si, por otro lado, $\theta \in \Theta_0^c$, pero la prueba de hipótesis decide aceptar H_0, se dice que se ha cometido *error de tipo II*.

Denotemos por P_θ a la distribución del vector aleatorio X cuando cada X_i tiene función de densidad o de probabilidad $f(\cdot, \theta)$, $i = 1, \ldots, n$. Entonces en un problema de prueba de hipótesis $H_0 : \theta \in \Theta_0$ vs $H_1 : \theta \in \Theta_0^c$, dada una prueba de hipótesis con región de rechazo R, si $\theta \in \Theta_0$, la probabilidad del error de tipo I es $P_\theta\,(X \in R)$. Si $\theta \in \Theta_0^c$, la probabilidad del error de tipo II es $P_\theta\,(X \in R^c) = 1 - P_\theta\,(X \in R)$.

Definición 3. Dada una prueba de hipótesis con región de rechazo R, la función $\beta : \Theta \to [0, 1]$ dada por $\beta(\theta) = P_\theta(X \in R)$ se llama la *función potencia* de la prueba.

Obviamente lo ideal sería que β tomara el valor 0 para todo $\theta \in \Theta_0$ y el valor 1 para todo $\theta \in \Theta_0^c$, sin embargo, excepto en situaciones triviales, este ideal no se alcanza. De esta manera, una buena prueba será aquella que toma valores cercanos a 0 para $\theta \in \Theta_0$ y valores cercanos a 1 para $\theta \in \Theta_0^c$. Esto conduce a la siguiente definición.

Definición 4. Consideremos el problema de prueba de hipótesis $H_0 : \theta \in \Theta_0$ vs $H_1 : \theta \in \Theta_0^c$.

(a) Para $0 \leq \alpha \leq 1$, una prueba con función potencia $\beta(\theta)$ es una *prueba de tamaño* α si $\sup_{\theta \in \Theta_0} \beta(\theta) = \alpha$.

(b) Para $0 \leq \alpha \leq 1$, una prueba con función potencia $\beta(\theta)$ es una *prueba de nivel* α si $\sup_{\theta \in \Theta_0} \beta(\theta) \leq \alpha$.

(c) Sea C una clase de pruebas para probar $H_0 : \theta \in \Theta_0$ vs $H_1 : \theta \in \Theta_0^c$. Se dice que una prueba en la clase C, con función potencia $\beta(\theta)$, es una *prueba uniformemente más potente* en la clase C si $\beta(\theta) \geq \beta^{'}(\theta)$ para toda $\theta \in \Theta_0^c$ y para toda $\beta^{'}(\theta)$ que es una función potencia de una prueba en la clase C.

En este trabajo, la clase C será la clase de todas las pruebas de nivel α. Es decir, el propósito será encontrar la prueba uniformemente más potente de nivel α.

Uno de los resultados más famosos que describe con claridad cuales pruebas son uniformemente más potentes de nivel α cuando tanto H_0 como H_1 son hipótesis simples, es decir, cuando H_0 y H_1 especifican cada una sólo una distribución para la muestra X, es el lema de Neyman-Pearson. Este lema puede generalizarse de forma que permita obtener pruebas uniformemente más potentes de nivel α para cuando H_0 y H_1 son hipótesis estadísticas compuestas unilaterales, es decir, pruebas de la forma $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$ o $H_0 : \theta \geq \theta_0$ vs $H_1 : \theta < \theta_0$. Tal generalización es conocida como el teorema de Karlin-Rubin. Por propósitos didácticos hemos decidido incluir en la sección 2 las demostraciones de ambos resultados. Ambas demostraciones están basadas en las demostraciones dadas en [2] (véase también [8] y [9]), pero se hace un desarrollo más detallado. Finalmente, en la sección 3 presentamos dos ejemplos, no incluídos en las referencias más conocidas de la Estadística, sobre el uso del teorema de Karlin-Rubin para determinar pruebas uniformemente más potentes de nivel α. En ambos ejemplos se deben implementar procedimientos numéricos para llevar a cabo las pruebas de hipótesis referidas.

2. Lema de Neyman - Pearson y teorema de Karlin-Rubin

Los resultados de teoría de la medida que se usan en las demostraciones dadas en esta sección pueden ser consultados, por ejemplo, en [1]. Recordemos los siguientes conceptos.

Definición 5. Sea $X = (X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria de la función de densidad o de probabilidad $f(x;\theta)$. Un estadístico $T = T(X)$ es *suficiente* si la distribución condicional de X dado $T = t$ no depende de θ.

Así, de acuerdo con esta definición, un estadístico suficiente resume la información que acerca del parámetro θ está contenido en la muestra X (ninguna información adicional en la muestra X, aparte del valor del estadístico T, contiene más información sobre θ).

Definición 6. Una familia de funciones de densidad o de probabilidad $\{g(t;\theta) : \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}\}$ de una variable aleatoria T, tiene *razón de verosimilitudes monótona* si, siempre que $\theta_1 < \theta_2$,

$$\frac{g(t;\theta_2)}{g(t;\theta_1)}$$

es monótona como función de t en $\{t : g(t;\theta_1) > 0 \text{ o } g(t;\theta_2) > 0\}$, donde definimos $\frac{c}{0} = \infty$ si $c > 0$.

Proposición 1. Sea T una variable aleatoria cuya familia de densidades o de probabilidades es $\{g(t;\theta) : \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}\}$, tal que para $\theta_1 < \theta_2$,

$$\frac{g(t;\theta_2)}{g(t;\theta_1)}$$

es creciente como función de t. Entonces

$$P_{\theta_2}(T \leq t) \leq P_{\theta_1}(T \leq t).$$

Prueba. Sean $t_1 < t < t_2$. De aquí

$$\frac{g(t_1;\theta_2)}{g(t_1;\theta_1)} \leq \frac{g(t_2;\theta_2)}{g(t_2;\theta_1)} \implies g(t_1;\theta_2)g(t_2;\theta_1) \leq g(t_1;\theta_1)g(t_2;\theta_2).$$

Integrando primero sobre t_1 de $-\infty$ a t y después sobre t_2 de t a ∞ se tiene

$$P_{\theta_2}(T \leq t)(1 - P_{\theta_1}(T \leq t)) \leq P_{\theta_1}(T \leq t)(1 - P_{\theta_2}(T \leq t)),$$

de donde,

$$P_{\theta_2}(T \leq t) \leq P_{\theta_1}(T \leq t).$$

■

Teorema 1. (*Lema de Neyman - Pearson*) Sea la prueba de hipótesis $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1$, donde $f(x;\theta_i)$ es la función de densidad o probabilidad correspondiente a θ_i, $i = 1, 2$. Consideremos una región de rechazo R tal que

$$x \in R \quad si \quad f(x;\theta_1) > kf(x;\theta_0) \quad y \quad x \in R^c \quad si \quad f(x;\theta_1) < kf(x;\theta_0) \tag{1}$$

para algún $k \geq 0$, y

$$\alpha = P_{\theta_0}(X \in R). \tag{2}$$

Entonces

(a) (Suficiencia) Toda prueba con región de rechazo R que cumple (1) y (2) es una prueba de nivel α uniformemente más potente.

(b) (Necesidad) Si existe una prueba que satisface (1) y (2) con $k > 0$, entonces toda prueba de nivel α uniformemente más potente es una prueba de tamaño α, y toda prueba de nivel α uniformemente más potente satisface (1), excepto quizá en un conjunto A que satisface $P_{\theta_0}(X \in A) = P_{\theta_1}(X \in A) = 0$.

Prueba. Probaremos el teorema para el caso en el que $f(x;\theta_0)$ y $f(x;\theta_1)$ son funciones de densidad de variables aleatorias (absolutamente) continuas. La demostración para el caso de variables aleatorias discretas es similar; sólo hay que reemplazar las integrales por sumas. Para cualquier prueba con región de rechazo R^*, definimos una función de prueba ϕ^* como sigue:

$$\phi^*(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in R^* \\ 0 \text{ si } x \notin R^* \end{cases}.$$

Sea ϕ la función de prueba de una prueba que satisface (1) y (2). Sea $\phi^{'}$ la función de prueba de cualquier otra prueba de nivel α. Sean $\beta(\theta)$ y $\beta^{'}(\theta)$ las funciones potencia de las pruebas ϕ y $\phi^{'}$ respectivamente. Veamos que

$$(\phi(x) - \phi^{'}(x))(f(x;\theta_1) - kf(x;\theta_0)) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Si $x \in R$, se tiene que $\phi(x) = 1$ y $0 \leq \phi^{'}(x) \leq 1$, por lo que $\phi(x) - \phi^{'}(x) \geq 0$.

Por (1), $f(x;\theta_1) - kf(x;\theta_0) \geq 0$, de donde

$$(\phi(x) - \phi'(x))(f(x;\theta_1) - kf(x;\theta_0)) \geq 0.$$

Si $x \in R^c$, se tiene que $\phi(x) = 0$ por lo que $\phi(x) - \phi^{'}(x) \leq 0$.

Por (1) $f(x;\theta_1) - kf(x;\theta_0) < 0$, luego

$$(\phi(x) - \phi'(x))(f(x;\theta_1) - kf(x;\theta_0)) \geq 0.$$

Si $R^{'}$ es la región de rechazo de $\phi^{'}$,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int \left[\phi(x) - \phi^{'}(x)\right] \left[f(x;\theta_1) - kf(x;\theta_0)\right] dx \qquad (3)\\
&= \int \left[\phi(x) - \phi^{'}(x)\right] f(x;\theta_1)dx - \int \left[\phi(x) - \phi^{'}(x)\right] kf(x;\theta_0)dx\\
&= \int \phi(x)f(x;\theta_1)dx - \int \phi^{'}(x)f(x;\theta_1)dx - k\int \phi(x)f(x;\theta_0)dx\\
&\quad +k\int \phi^{'}(x)f(x;\theta_0)dx\\
&= \int_R \phi(x)f(x;\theta_1)dx + \int_{R^c} \phi(x)f(x;\theta_1)dx - \int_{R'} \phi^{'}(x)f(x;\theta_1)dx\\
&\quad - \int_{(R')^c} \phi^{'}(x)f(x;\theta_1)dx\\
&\quad -k\int_R \phi(x)f(x;\theta_0)dx - k\int_{R^c} \phi(x)f(x;\theta_0)dx + k\int_{R'} \phi^{'}(x)f(x;\theta_0)dx\\
&\quad +k\int_{(R')^c} \phi^{'}(x)f(x;\theta_0)dx\\
&= \int_R f(x;\theta_1)dx - \int_{R'} f(x;\theta_1)dx - k\int_R f(x;\theta_0)dx + k\int_{R'} f(x;\theta_0)dx\\
&= \beta(\theta_1) - \beta^{'}(\theta_1) - k(\beta(\theta_0) - \beta^{'}(\theta_0)).
\end{aligned}$$

La afirmación (a) se demuestra notando que, como $\phi^{'}$ es una prueba de nivel α y ϕ es una prueba de tamaño α ($\sup_{\theta\in\Theta_0} P_\theta(x \in R) = P_{\theta_0}(x \in R) = \alpha$, ya que Θ_0 tiene sólo un punto), entonces $\beta(\theta_0) - \beta^{'}(\theta_0) = \alpha - \beta^{'}(\theta_0) \geq 0$. Por lo tanto, de (3) y como $k \geq 0$, se tiene

$$0 \leq \beta(\theta_1) - \beta^{'}(\theta_1) - k(\beta(\theta_0) - \beta^{'}(\theta_0)) \leq \beta(\theta_1) - \beta^{'}(\theta_1),$$

de donde $\beta(\theta_1) \geq \beta^{'}(\theta_1)$, es decir, ϕ tiene mayor potencia que $\phi^{'}$. Ya que $\phi^{'}$ fue una prueba arbitraria de nivel α y θ_1 es el único punto en Θ_0^c, se concluye que ϕ es una prueba de nivel α uniformemente más potente.

Para probar la afirmación (b), sea ahora $\phi^{'}$ la función de prueba de cualquier prueba de nivel α uniformemente más potente. Por (a), ϕ, la prueba que satisface

(1) y (2), también es una prueba de nivel α uniformemente más potente, de donde $\beta(\theta_1) = \beta^{'}(\theta_1)$. De (3), y puesto que $k > 0$, se tiene

$$\alpha - \beta^{'}(\theta_0) = \beta(\theta_0) - \beta^{'}(\theta_0) \leq 0,$$

de donde

$$\alpha \leq \beta^{'}(\theta_0). \tag{4}$$

De (4) y el hecho de que $\beta^{'}(\theta_0) \leq \alpha$, se tiene que $\beta^{'}(\theta_0) = \alpha$.

Así, ϕ' es una prueba de tamaño α; esto también implica que (3) es una igualdad, es decir, se tiene,

$$\int \left[\phi(x) - \phi^{'}(x)\right] [f(x;\theta_1) - kf(x;\theta_0)]\, dx = 0.$$

Como el integrando es no - negativo, se tiene entonces que

$$\left[\phi(x) - \phi^{'}(x)\right] [f(x;\theta_1) - kf(x;\theta_0)] = 0,$$

excepto en un conjunto A con medida de Lebesgue 0, es decir, excepto en un conjunto A tal que

$$\int_A dx = 0.$$

Como $f(x;\theta_1) - kf(x;\theta_0) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, resulta que

$$\phi(x) = \phi'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus A.$$

De aquí se sigue que las regiones de rechazo de $\phi \quad y \quad \phi'$ difieren en un conjunto de medida 0. Así, ϕ' satisface (1), excepto en A. Por la continuidad absoluta de $f(x;\theta_i)dx$, $i = 1, 2$, con respecto a la medida de Lebesgue, se tiene que

$$\int_A f(x;\theta_i)dx = 0,$$

o sea,

$$P_{\theta_0}(X \in A) = P_{\theta_1}(X \in A) = 0.$$

■

Corolario 1. Consideremos el problema de prueba de hipótesis $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1$. Supongamos que $T(X)$ es un estadístico suficiente del parámetro θ, y que $g(t;\theta_i)$, $i = 0, 1$, es la función de densidad o de probabilidad de T. Entonces cualquier prueba basada en T con región de rechazo S es una prueba uniformemente más potente de nivel α si satisface

$$t \in S \text{ si } g(t;\theta_1) > kg(t;\theta_0) \quad \text{y} \quad t \in S^c \text{ si } g(t;\theta_1) < kg(t;\theta_0) \tag{5}$$

para algún $k \geq 0$, donde

$$\alpha = P_{\theta_0}(T \in S). \tag{6}$$

Prueba. En términos de la muestra original X, la prueba basada en T tiene región de rechazo $R = \{x : T(x) \in S\}$. Por el teorema de factorización (véase, por ejemplo [2], p. 276) para estadísticos suficientes, la función de densidad o de probabilidad de X se puede escribir como $f(x; \theta_i) = g(T(x); \theta_i)\, h(x)$, $i = 0, 1$, para alguna función $h(x)$ no negativa. Multiplicando las desigualdades en (5) por esta función no negativa, vemos que R satisface

$$x \in R \;\; si \;\; f(x; \theta_1) = g(T(x); \theta_1)\, h(x) > kg(T(x); \theta_0)\, h(x) = kf(x; \theta_0)$$

y

$$x \in R^c \;\; si \;\; f(x; \theta_1) = g(T(x); \theta_1)\, h(x) < kg(T(x); \theta_0)\, h(x) = kf(x; \theta_0)\,.$$

Además, por (6),

$$P_{\theta_0}(X \in R) = P_{\theta_0}(T(X) \in S) = \alpha.$$

Así, por la parte de suficiencia del teorema de Neyman - Pearson, la prueba basada en T es una prueba uniformemente más potente de nivel α. ∎

Teorema 2. (*Teorema de Karlin - Rubin*) Consideremos el problema de prueba de hipótesis $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$. Supongamos que T es un estadístico suficiente de θ, y que la familia de funciones de densidad o de probabilidad de T, $\{g(t; \theta) : \theta \in \Theta\}$, tiene razón de verosimilitudes creciente. Entonces para cualquier t_0, la prueba que rechaza H_0 si y sólo si $T > t_0$ es una prueba uniformemente más potente de nivel α, donde $\alpha = P_{\theta_0}(T > t_0)$.

Prueba. Sea $\beta(\theta) = P_\theta(T > t_0)$ la función potencia de la prueba. Sea $\theta' > \theta_0$ y consideremos las pruebas $H_0' : \theta = \theta_0$ vs $H_1' : \theta = \theta'$. Ya que la familia de funciones de densidad o de probabilidad de T tiene razón de verosimilitudes creciente, de la proposición 1 tenemos que si

$$\theta_0 < \theta', \text{ entonces } P_{\theta'}(T \leq t_0) \leq P_{\theta_0}(T \leq t_0),$$

equivalentemente,

$$1 - P_{\theta_0}(T \leq t_0) \leq 1 - P_{\theta'}(T \leq t_0),$$

de donde

$$P_{\theta_0}(T > t_0) \leq P_{\theta'}(T > t_0),$$

o sea

$$\beta(\theta_0) \leq \beta(\theta') \;\; si \;\; \theta_0 < \theta'.$$

Así, $\beta(\theta)$ es creciente. Luego,

(i) $\sup_{\theta \leq \theta_0} \beta(\theta) = \beta(\theta_0) = \alpha$, por lo que la prueba es de nivel α.

(ii) Si definimos $k' = \inf\limits_{t \in \mathcal{T}} \frac{g(t;\theta')}{g(t;\theta_o)}$, donde

$$\mathcal{T} = \{t : t > t_0 \text{ y } g(t; \theta') > 0 \text{ o } g(t; \theta_0) > 0\}\,,$$

resulta que

$$t > t_0 \iff \frac{g(t;\theta')}{g(t;\theta_0)} > k'.$$

Junto con el corolario 1, (i) y (ii) implican que $\beta(\theta') \geq \beta^*(\theta')$, donde $\beta^*(\theta)$ es la función potencia de cualquier otra prueba de nivel α de H_0', es decir, cualquier prueba que satisface $\beta^*(\theta_0) \leq \alpha$. Sin embargo, toda prueba de nivel α de H_0 satisface $\beta^*(\theta_0) \leq \sup\limits_{\theta\in\Theta_0} \beta^*(\theta_0) \leq \alpha$. Así, $\beta(\theta') \geq \beta^*(\theta')$ para toda prueba de nivel α de H_0. Ya que θ' fue arbitraria, la prueba es una prueba uniformemente más potente de nivel α. ∎

Se puede demostrar, bajo las mismas condiciones del teorema 2, que la prueba que rechaza $H_0 : \theta \geq \theta_0$ a favor de $H_1 : \theta < \theta_0$ si y sólo si $T < t_0$ es una prueba uniformemente más potente de nivel $\alpha = P_{\theta_0}(T < t_0)$.

3. Ejemplos

En los dos ejemplos siguientes se aplica el teorema de Karlin - Rubin a dos poblaciones con distribuciones gamma y exponencial truncada, respectivamente. La distribución gamma es muy importante porque, entre otras aplicaciones, se usa en medicina (véase [4]) y en climatología (véase [7]). La distribución exponencial truncada es también muy importante debido a sus aplicaciones en análisis de confiabilidad (véase [5]) y en actuaría (véase [6]), entre otras.

Recordemos que un estadístico suficiente $T(X)$ se dice ser un *estadístico suficiente minimal* si, para cualquier otro estadístico suficiente $T'(X)$, $T(x)$ es una función de $T'(x)$. Lo cual significa que si $T'(x) = T'(y)$, entonces $T(x) = T(y)$.

Ejemplo 1. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una población con distribución $gamma(\alpha, 1)$, $\alpha > 0$, es decir, con función de densidad

$$f(x;\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x}, \quad x > 0,$$

donde $\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ es la función gamma. La función de densidad conjunta de $X_1, ..., X_n$ es

$$f_n(x_1, ..., x_n; \alpha) = \frac{1}{(\Gamma(\alpha))^n} (\Pi_{i=1}^n x_i)^{\alpha-1} \exp(-\Sigma_{i=1}^n x_i),$$

de donde se sigue que el estadístico

$$T = \log(\Pi_{i=1}^n X_i) = \Sigma_{i=1}^n \log(X_i)$$

es un estadístico suficiente minimal (véase por ejemplo, el teorema 6.2.13, p. 281 de [2]) para el parámetro α. Antes de encontrar la densidad de T, primero observemos que si Z tiene distribución $exp(1) = gamma(1, 1)$, entonces la densidad de $Y = \log(Z)$ es

$$h_1(y) = e^y e^{-e^y}.$$

Ahora probemos por inducción sobre el tamaño de muestra n (véase [10]) que la densidad de T es

$$g(t;\alpha) = \frac{1}{(\Gamma\left(\alpha\right))^n} e^{(\alpha-1)t} h_n(t), \tag{7}$$

donde $h_n(t)$ es la densidad de la suma de los logaritmos de una muestra aleatoria de tamaño n de la distribución exp(1).

(a) Si $n = 1$, entonces $T = \log(X_1)$, de donde se tiene que la densidad de T es

$$g(t;\alpha) = f(e^t;\alpha)\left|\frac{dx_1}{dt}\right| = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} e^{t(\alpha-1)} e^{-e^t} e^t = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} e^{t(\alpha-1)} h_1(t),$$

donde h_1 es la densidad de $\log(Z)$, con Z una variable aleatoria con distribución exp(1).

(b) Supongamos que la afirmación se cumple para tamaños de muestra $n-1$, $n \geq 2$, y probemos que entonces también se cumple para tamaños de muestra n. Sean $T_1 = \log(X_1)$, $T_{n-1} = \Sigma_{i=2}^n \log(X_i)$, y $g_1(t_1;\alpha)$ y $g_{n-1}(t_{n-1};\alpha)$ las densidades de T_1 y T_{n-1} respectivamente. Entonces la función de densidad de $T = T_1 + T_{n-1}$ es

$$\begin{aligned} g(t;\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(w;\alpha) g_{n-1}(t-w;\alpha) dw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} e^{(\alpha-1)w} h_1(w) \frac{1}{(\Gamma(\alpha))^{n-1}} e^{(\alpha-1)(t-w)} h_{n-1}(t-w) dw \\ &= \frac{1}{(\Gamma(\alpha))^n} e^{(\alpha-1)t} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(w) h_{n-1}(t-w) dw. \end{aligned}$$

Puesto que h_1 es la densidad de $\log(Z_1)$ y h_{n-1} es la densidad de $\Sigma_{i=2}^n \log(Z_i)$, donde las Z_i son variables aleatorias independientes con distribución exp(1), $i = 1, ..., n$, entonces la densidad de $Y_n = \Sigma_{i=1}^n \log(Z_i) = \log(Z_1) + \Sigma_{i=2}^n \log(Z_i)$ es

$$h_n(y_n) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(w) h_{n-1}(y_n - w) dw.$$

Así, la función de densidad de T es

$$g(t;\alpha) = \frac{1}{(\Gamma(\alpha))^n} e^{(\alpha-1)t} h_n(t),$$

donde $h_n(t)$ es la densidad de la suma de los logaritmos de una muestra aleatoria de tamaño n de la distribución exp(1).

De (a) y (b) se tiene que la densidad de T es la función (7). Además es inmediato comprobar que

$$\frac{g(t;\alpha_2)}{g(t;\alpha_1)}$$

es creciente como función de t si $\alpha_1 < \alpha_2$. Por lo tanto, si realizamos la prueba de hipótesis $H_0 : \alpha \leq \alpha_0$ vs $H_1 : \alpha > \alpha_0$, la prueba que rechaza H_0 si y sólo si $T > t_0$ es una prueba uniformemente más potente de nivel γ, donde $\gamma = P_{\alpha_0}(T > t_0)$.

Ejemplo 2. Sea la función de distribución exponencial truncada

$$F(x;\theta) = \frac{e^{\theta x} - 1}{e^\theta - 1}, \quad x \in (0,1), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Esta familia aparece en Deemer y Votaw [3]. Si $X_1, ..., X_n$ es una muestra aleatoria de una población con distribución exponencial truncada, entonces su función de densidad conjunta es

$$f_n(x_1, ..., x_n; \theta) = \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^n e^{\theta \Sigma_{i=1}^n x_i},$$

luego el estadístico suficiente minimal de θ es

$$T = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

O'Reilly y Rueda [11] obtuvieron la función de densidad de T, la cual es

$$g(t;\theta) = \left(\frac{\theta}{e^{\theta}-1}\right)^n I_n\left(t\right) e^{\theta t}, \quad t \in \left(0, n\right),$$

donde

$$I_n\left(t\right) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right) (-1)^j \left(t-j\right)_+^{n-1}$$

es la función de densidad de la suma de n variables aleatorias independientes con distribución uniforme en $(0,1)$; $(t-j)_+$ es la parte positiva de $(t-j)$. Es directo comprobar que

$$\frac{g(t;\theta_2)}{g(t;\theta_1)}$$

es creciente como función de t si $\theta_1 < \theta_2$. De aquí, si llevamos a cabo la prueba de hipótesis $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$, la prueba que rechaza H_0 si y sólo si $T > t_0$ es una prueba uniformemente más potente de nivel α, donde $\alpha = P_{\theta_0}(T > t_0)$.

Referencias

[1] Ash, R. B. (2002). Real analysis and probability. Academic Press, New York.

[2] Casella, G. and R. L. Berger (2002). Statistical inference. Duxbury, USA.

[3] Deemer, W. L. and D. F. Votaw (1955). Estimation of parameters of truncated or censored exponential distributions. Annals of Mathematical Statistics, 26, 498-504.

[4] Fay, M. P. and E. J. Feuer (1997). Confidence intervals for directly standardized rates: a method based on the gamma distribution. Statistics in Medicine. 16, 791-801.

[5] Gelfand, A. E., A. F. M. Smith and T. Lee (1992). Bayesian analysis of constrained parameter and truncated data problems usings Gibbs sampling. Journal of the American Statistical Association, 87(418), 523-532.

[6] Gómez-Déniz, E. y J. M. Sarabia (2008). La distribución binomial exponencial truncada con aplicaciones en el sector del seguro de automóviles. Anales del Instituto de Actuarios Españoles, Tercera Época, 14, 3-22.

[7] Husak, G. J., J. Michaelsen, and C. Funk (2007). Use of the gamma distribution to represent monthly rainfall in Africa for drought monitoring applications. International Journal of Climatology, 27, 935-944.

[8] Lehmann, E. L. (1959). Testing statistical hypotheses. Wyley, New York.

[9] Mood, A. M., F. A. Graybill and D. C. Boes (1974). Introduction to the theory of statistics. McGraw-Hill, Singapore.

[10] Nájera, R. E. (2014). La distribución fiducial en modelos que no son de grupo. Cómo simular de ella. Tesis de Doctorado en Ciencias. Universidad Nacional Autónoma de México.

[11] O'Reilly, F. and R. Rueda (2007). Fiducial inference for the exponencial distribution. Communications in Statistics-Theory and Methods, 36, 2207-2212.